

INAUGURAL – DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Naturwissenschaftlich–Mathematischen
Gesamtfakultät

der

Ruprecht–Karls–Universität
Heidelberg

vorgelegt von

Dipl.–Phys. Udo D. J. Gieseler
aus Hagen

Tag der mündlichen Prüfung: 11. Februar 1998

Transport und Beschleunigung von Teilchen in astrophysikalischen Plasmen

Gutachter: Priv.-Doz. Dr. John G. Kirk
Prof. Dr. Werner M. Tscharnuter

Transport und Beschleunigung von Teilchen in astrophysikalischen Plasmen

Die Beschleunigung hochenergetischer nicht-thermischer kosmischer Strahlen hängt entscheidend von deren Transport im Konfigurations- und Impulsraum ab. Dieser Transport führt für Photonen auf eine Boltzmann-Gleichung. Es wird das Problem der Erzeugung von hochenergetischen Photonen in einer heißen Plasmascheibe formuliert und die entsprechende Integro-Differential-Gleichung semi-analytisch durch Rückführung auf ein algebraisches Eigenwertproblem gelöst. Ohne Einschränkung an die Winkelabhängigkeit der Quellfunktion werden Lösungen erhalten, die für alle optischen Tiefen der Plasmascheibe gültig sind. Durch diese Lösungsmethode kann nicht nur der Index des Potenzgesetz-Spektrums erhalten werden, sondern auch die Winkel- und Ortsverteilung dieser Strahlung. Es stellt sich heraus, daß diese Strahlung im Falle einer optisch dünnen Scheibe stark in Richtung der Scheibenoberfläche kollimiert ist.

Bei der Beschleunigung von geladenen Teilchen spielt der Transport unter dem Einfluß von äußeren elektromagnetischen Feldern eine entscheidende Rolle. In Supernova-Überresten erwartet man stochastische Magnetfelder, die in manchen Gebieten senkrecht zur Stoßnormalen gerichtet sind. Nach neueren analytischen Untersuchungen führt das sich aus dieser Konstellation ergebende *anomale* Transportverhalten zu einem steileren Spektrum der kosmischen Strahlen als bei rein diffusivem Transport. Zur Untersuchung des Transportes und der Beschleunigung wird eine Monte-Carlo-Methode verwendet. Die Ergebnisse werden diskutiert und mit der analytischen Beschreibung verglichen, deren Gültigkeitsbereich bestimmt wird.

Transport and acceleration of particles in astrophysical plasmas

The acceleration of high energy non-thermal cosmic rays depends crucially on their transport in configuration and momentum space. This transport results for photons in a Boltzmann equation. The problem of production of high energy photons in a hot plasma disk is formulated and the corresponding integro-differential equation is solved. This is done by reduction to an algebraic eigenvalue problem. Solutions are obtained allowing for an arbitrary anisotropy of the source function, with no restriction on the optical depth of the disk. In addition to the spectral index, the method of solution allows one to determine the spatial and angular dependence of the emergent radiation. In the case of an optically thin disk, this radiation is strongly collimated along the disk surface.

The acceleration of charged particles is determined by the external electromagnetic fields. Supernova remnants are expected to contain stochastic magnetic fields, which are in some regions directed perpendicular to the shock normal. Recent analytical results show that the resulting *anomalous* transport leads to a steeper spectrum of cosmic rays, than pure diffusive transport. A Monte-Carlo method is used to examine the transport and the acceleration. The results are discussed and compared with analytical treatments, the region of validity, of which is determined.

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|-----------|
| Einleitung | 1 |
| 1 Transportgleichungen | 3 |
| 1.1 Klassischer Transport | 4 |
| 1.1.1 Beschreibung von Photonen | 5 |
| 1.1.2 Beschreibung geladener Teilchen | 9 |
| 1.2 Anomaler Transport | 12 |
| 2 „Beschleunigung“ von Photonen: Comptonisierung | 17 |
| 2.1 Der Compton–Streuquerschnitt | 19 |
| 2.2 Formulierung des Eigenwertproblems | 20 |
| 2.3 Die semi–analytische Lösungsmethode | 23 |
| 2.4 Reduktion der Boltzmann–Gleichung | 26 |
| 2.4.1 Entwicklung der Phasenfunktion für $\Theta \ll 1$ | 27 |
| 2.4.2 Entwicklung der Phasenfunktion für $\Theta \gg 1$ | 29 |
| 2.4.3 Die Winkelabhängigkeit von $J(\mu, \tau)$ | 31 |
| 2.4.4 Die Ortsabhängigkeit von $J(\mu, \tau)$ | 34 |
| 2.5 Ergebnisse | 38 |
| 2.5.1 Der Spektralindex | 38 |
| 2.5.2 Die Winkelabhängigkeit | 42 |
| 2.5.3 Die Ortsverteilung | 46 |
| 2.6 Diskussion und Ausblick | 48 |

| | |
|---|------------|
| 3 Beschleunigung geladener Teilchen | 51 |
| 3.1 Beschleunigungs-Mechanismen | 53 |
| 3.1.1 Diffusive Beschleunigung | 54 |
| 3.1.2 Stoß-Drift-Beschleunigung | 56 |
| 3.2 Beschleunigung bei anomalem Transport | 63 |
| 3.3 Monte-Carlo-Simulation | 65 |
| 3.3.1 Die Propagator-Methode | 66 |
| 3.3.2 Die Zufallsschritt-Methode | 67 |
| 3.4 Ergebnisse | 75 |
| 3.4.1 Propagator und Dichteverteilung | 75 |
| 3.4.2 Spektralindex bei schräger Stoßfront | 85 |
| 3.4.3 Spektralindex bei stochastischem Magnetfeld | 88 |
| 3.5 Diskussion und Ausblick | 95 |
| | |
| 4 Zusammenfassung | 97 |
| | |
| A Photonen-Diffusion in einer Scheibe | 101 |
| | |
| B Integrale zur Comptonisierung | 107 |
| | |
| Literaturverzeichnis | 111 |
| | |
| Danksagung | 117 |

Einleitung

In den unterschiedlichsten Bereichen der astronomischen Beobachtungsmöglichkeiten kann hochenergetische kontinuierliche nicht-thermische Strahlung detektiert werden. Dies umfaßt zum einen das elektromagnetische Spektrum verschiedener astrophysikalischer Objektklassen und zum anderen die geladene kosmische Strahlung, welche sich mindestens bis zu einer Energie von 10^{20} eV fortsetzt. Während die Klärung des Auftretens solch hoher (und selbst um mehrere Zehnerpotenzen niedrigerer) Energien eine Herausforderung darstellt, ist die nicht-thermische Strahlung außerdem hilfreich, das Verständnis der astrophysikalischen Objekte zu vertiefen, in denen diese Strahlung erzeugt wird. Dabei ergänzen sich die Beobachtungen von Teilchen aus einem thermischen Gleichgewichtszustand mit der Beobachtung von kontinuierlicher oder diskreter nicht-thermischer Strahlung. Dadurch werden verschiedene Parameter, wie z.B. optische Tiefe und Temperatur, der Messung an der Erde zugänglich. Voraussetzung hierfür ist ein Verständnis der Erzeugungsprozesse der Strahlung, die mit dem Transport der Teilchen im Phasenraum verknüpft sind. Bei nicht-thermischen Teilchen beschreibt dieser Transport deren Bewegung in einem Medium, mit dem Streuungen oder Stöße einerseits so selten sind, daß es nicht zu einem Gleichgewichtszustand kommt; andererseits stellen gerade diese Wechselwirkungen direkt oder indirekt die Quelle für eine Energieverschiebung der Teilchen dar. Dies sind für Photonen die Stöße mit Elektronen des Hintergrundmediums und für geladene Teilchen die Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld. Diese allgemeine Problemstellung ist in Kapitel 1 für Photonen und geladene Teilchen dargestellt.

Als Transportgleichung für Photonen, die für viele astrophysikalische Objekte Anwendung findet, erhält man eine Boltzmann-Gleichung mit einem Compton-Streuterm, der die Energieänderung beschreibt. Das hochenergetische nicht-thermische Spektrum der Photonen besteht aus einer Potenzgesetz-Lösung für „beschleunigte“ Photonen. In Kapitel 2 ist eine neue semi-analytische Methode zur Lösung dieses Problems dargestellt, bei dem Photonen sich in einer Scheibe aus heißem Plasma bewegen. Es stellt sich heraus, daß der Index des Potenzgesetzes der Photonen, welche die Scheibe verlassen, von der optischen Tiefe des Plasmas entlang der Scheibennormalen und der Plasmatemperatur abhängt. Die Vermessung des Spektralindex läßt sich daher bei bekannter Plasmatempera-

tur zur Bestimmung der optischen Tiefe der Beschleunigungsregion benutzen. Darüber hinaus wird gezeigt, daß diese comptonisierte Strahlung im Falle optisch dünner Scheiben sehr stark in Richtung der Scheibenoberfläche kollimiert ist.

Die eben beschriebene *direkte* Verknüpfung der Teilchenverteilungen mit bestimmten Objekten, in denen sie erzeugt worden sind, ist für geladene Teilchen nicht möglich. Der Grund liegt in der Ablenkung der Teilchen durch das galaktische bzw. intergalaktische Magnetfeld, das die Richtungsinformation zerstört. Hochenergetische Elektronen können jedoch in einem Magnetfeld Synchrotronstrahlung erzeugen, die dieselbe Rolle wie die oben beschriebenen direkt „beschleunigten“ Photonen spielen kann. Es bleibt jedoch, die Eigenschaften des Spektrums der kosmischen Strahlung mit einer *Klasse* von astrophysikalischen Objekten in Verbindung zu bringen. Supernova-Überreste stellen geeignete Objekte zur Beschleunigung geladener Teilchen dar. Abgesehen von globalen Energiebetrachtungen ist die Verknüpfung der gemeinsamen Eigenschaften dieser Objekte mit dem Spektrum der kosmischen Strahlung ein wichtiges Element zur Klärung der Fragen nach der Quelle der kosmischen Strahlen sowie zum Verständnis der Eigenschaften der Supernova-Überreste selbst. Die entscheidende Rolle im Beschleunigungsprozeß für geladene Teilchen spielen die Stoßfronten, die sich z.B. als Folge einer vorangegangenen Sternexplosion in den Supernova-Überresten ausbreiten, wie auch das magnetische Feld, das den Stern umgeben hat. Für die Eigenschaften des Spektrums der kosmischen Strahlen sowie der durch hochenergetische Elektronen erzeugten Synchrotronspektren ist dann die Kombination von Stoßfront und Magnetfeld von Bedeutung. Während das Magnetfeld entscheidend den räumlichen Transport der Teilchen beeinflusst (siehe Kap. 1), stellt die Stoßfront mit der von ihr erzeugten Dynamik den Mechanismus zur Beschleunigung von Teilchen dar (siehe Kap. 3). Die durch die turbulente Plasmabewegung erzeugte stochastische Komponente des Magnetfeldes spielt bei senkrecht zur Stoßfrontnormalen verlaufenden Magnetfeldern eine besondere Rolle. Von dieser Konstellation kann gerade in Supernova-Überresten ausgegangen werden. Unter den Bedingungen des senkrechten stochastischen Magnetfeldes zeigt die Teilchenbewegung ein sog. *anomales* Verhalten. Der Einfluß dieses Transportverhaltens auf das Impulsspektrum der beschleunigten geladenen Teilchen wird im Kapitel 3 mit Hilfe der Monte-Carlo-Methode untersucht. Wie durch analytische Untersuchungen vorhergesagt, zeigt sich ein signifikant steileres Spektrum im Unterschied zum häufig in Zusammenhang mit Stoßfronten betrachteten klassischen Transport.

Kapitel 1

Transportgleichungen

Die Bewegung von Teilchen in einem Medium folgt für eine Vielzahl von physikalischen Realisierungen, d.h. Arten von Teilchen und Medium, den gleichen Prinzipien. So können Neutronen, Photonen und geladene Teilchen von Transportgleichungen mit derselben mathematischen Struktur beschrieben werden (siehe z.B. Duderstadt & Martin 1979). Von grundsätzlicher Bedeutung für das Transportverhalten ist jedoch der statistische Charakter der Bewegung. Kann jeder Wechselwirkungsprozeß eines Teilchens mit dem Hintergrundmedium als unabhängig sowohl von der Vorgeschichte des Mediums als auch des Teilchens angesehen werden, so führt dies auf Transportgleichungen, die hier mit *klassisch* bezeichnet werden. Die Grundlagen dieser Theorie wurden schon Anfang dieses Jahrhunderts von Arthur Schuster und Karl Schwarzschild für die Beschreibung von astrophysikalischen Problemen wie Photonentransport in stellaren Atmosphären entwickelt (siehe z.B. Chandrasekhar 1960). Die grundlegenden Prinzipien dieser Transporteigenschaften wurden dann auf Neutronen übertragen (siehe z.B. Case & Zweifel 1967). In Kapitel 1.1 werden Eigenschaften dieser Theorie und im besonderen ihre Anwendung auf Photonen dargestellt.

Die Art der Teilchenbewegung und damit deren mathematische Beschreibung ändert sich grundlegend, wenn die Bewegung der Teilchen richtungs- oder ortsabhängig ist. Dieses kann bei geladenen Teilchen durch ein Magnetfeld verursacht sein. Solche Bedingungen sind z.B. in einem Fusionsreaktor gegeben, wo die Voraussetzung für diesen sog. *neoklassischen* Transport (Balescu 1988) die Erhaltung der magnetischen Oberflächen ist. Dies ist streng nur in einem ruhenden Plasma gegeben. Insbesondere in astrophysikalischen Plasmen führt die turbulente Bewegung des Plasmas zu einer Zerstörung der magnetischen Oberflächen. Die Magnetfeldlinien können dann eine stochastische Bewegung ausführen (Jokipii & Parker 1969a; 1969b). Die makroskopischen Größen sind in diesem Fall nicht mehr nur durch eine Mittelung über die Phasenraumkoordinaten individueller Teilchen zu erhalten, sondern erfordern ebenso eine Mittelung über die Gesamt-

heit der möglichen Realisierungen des Magnetfeldes. Unter diesen Bedingungen ist die Teilchenbewegung gegenüber dem klassischen Verhalten verändert. Dies wird mit *anomalem* Transport bezeichnet. Die Bewegung von Teilchen in stochastischen Magnetfeldern hat zunächst Auswirkungen auf ihr Diffusionsverhalten, welches charakterisiert werden kann durch die Zeitabhängigkeit der mittleren quadratischen Verschiebung der Teilchen $\langle (\Delta x(t))^2 \rangle \propto t^\alpha$. Während für $\alpha = 1$ das System diffusiv genannt wird, so zeigt es für $\alpha \neq 1$ anomales Verhalten. Für $\alpha > 1$ wird dies *super*-Diffusion genannt, während der Fall $0 < \alpha < 1$ mit *sub*-Diffusion bezeichnet wird (siehe z.B. Balescu 1995). Die hier betrachtete Realisierung eines stochastischen Magnetfeldes führt auf *sub*-Diffusion mit $\alpha = 1/2$ und ist in Kapitel 1.2 näher beschrieben.

1.1 Klassischer Transport

Bei der elementaren Beschreibung der Bewegung von individuellen Teilchen gehen wir zunächst von der Erhaltung ihrer Anzahl aus. In diesem Fall läßt sich aus dem Liouville-Theorem eine kinetische Gleichung für die Phasenraum-dichte ableiten. Zunächst sei die N -Teilchen Phasenraum-dichte gegeben durch $\mathcal{F}(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N, t)$. Das Liouville-Theorem drückt die Erhaltung eines Volumenelementes¹ Δ des Phasenraumes aus (siehe z.B. Goldstein 1989):

$$\frac{d}{dt} \Delta = 0. \quad (1.1)$$

Wegen der Erhaltung der Gesamtwahrscheinlichkeit $\int \mathcal{F} \Delta = 1$ muß demnach auch die Phasenraum-dichte zeitlich konstant sein. Die Liouville-Gleichung nimmt dann folgende Form an

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} \equiv \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \{\mathcal{F}, H\} \stackrel{!}{=} 0, \quad (1.2)$$

wobei H die Hamilton-Funktion und $\{\dots\}$ die Poisson-Klammer ist. Wir wollen im folgenden Systeme beschreiben, in denen die Wechselwirkung der einzelnen Teilchen untereinander vernachlässigt werden kann. In diesem Fall kann die Phasenraum-dichte als Produkt der Einteilchenfunktionen geschrieben werden:

$$\mathcal{F}(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N, t) = \prod_{i=1}^N f_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t). \quad (1.3)$$

Das Liouville-Theorem (Gl. 1.2) führt unter diesen Bedingungen auf die Liouville-Gleichung für die Einteilchenfunktionen f_i . Wir betrachten nun die Bewegung der Teilchen in einem äußeren Feld \mathbf{A} . Der kanonische Impuls ist dann

¹Die Dimension der Vektoren \mathbf{q} und \mathbf{p} ist durch die Anzahl der Freiheitsgrade f der Teilchen bestimmt, so daß die Dimension des Volumenelementes $2fN$ ist.

für Teilchen mit der Ladung e durch $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{q}} + e\mathbf{A}/c$ gegeben. Weiterhin benutzen wir die kanonischen Ableitungen der Hamilton-Funktion. Die Liouville-Gleichung² der Einteilchenfunktionen ist dann bei Unterdrückung des Indexes i gegeben durch

$$\frac{\partial f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} + \dot{\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \dot{\mathbf{p}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = 0. \quad (1.4)$$

In dieser allgemeinen Form gilt diese Gleichung zunächst sowohl für geladene als auch für ungeladene Teilchen. Diese bewegen sich ohne Wechselwirkung untereinander (in einem äußeren elektromagnetischen Feld). Tatsächlich sind wir aber an der Beschreibung von Teilchen interessiert, die sich in einem Plasma als Hintergrundmedium bewegen. Die Dichte der energiereichen Strahlung, die wir beschreiben wollen, ist dabei um mehrere Größenordnungen geringer als die des Plasmas, in dem sie sich bewegen. Wir können daher die Rückwirkung dieser Teilchen auf das Plasma in erster Näherung vernachlässigen. Von entscheidender Bedeutung, gerade auch für den Energiegewinn einzelner Teilchen, ist jedoch die Wirkung des Plasmas, welche sich durch individuelle stochastisch unabhängige Streuprozesse der Teilchen beschreiben läßt. Dies führt zu einer Änderung der Phasenraumdichte mit der Zeit, welche nicht vom Liouville-Theorem erfaßt wird. Die Änderung der Phasenraumdichte durch diese Prozesse bezeichnen wir mit \mathcal{S} . Dasselbe gilt für die Erzeugung (oder Vernichtung) von Teilchen in einer Quelle \mathcal{Q} . Gleichung (1.4) (bzw. Gl. 1.2) muß daher erweitert werden:

$$\frac{df}{dt} = \mathcal{S} + \mathcal{Q}. \quad (1.5)$$

Der Charakter der Streuprozesse und damit deren mathematische Beschreibung ist für Photonen und geladene Teilchen jedoch verschieden. Darüber hinaus ist diese Streuung für Photonen gerade der entscheidende Prozeß für deren Energiegewinn (Kapitel 1.1.1 und 2), während bei geladenen Teilchen die äußeren Felder eine entsprechende Bedeutung haben (Kapitel 1.1.2 und 3).

1.1.1 Beschreibung von Photonen

Zur Darstellung des Ortsteils der Phasenraumdichte für Photonen benutzen wir kartesische Koordinaten, beschrieben durch den Ortsvektor \mathbf{r} . Der Impuls kann ausgedrückt werden durch die Frequenz ν und die Richtung $\boldsymbol{\Omega}$ der Photonenausbreitung. Den Kosinus des Polarwinkels bezeichnen wir mit μ (vgl. Abb. 2.2). Die

²Betrachtet man das Feld \mathbf{A} nicht als äußeres Feld, sondern als durch die Teilchen erzeugt, so ist \mathbf{A} ein selbstkonsistentes Feld, das von der Verteilung f aller Teilchen abhängig ist. Dies führt auf die in f nicht-lineare Vlasov-Gleichung.

infinitesimalen Volumenelemente des Phasenraumes sind dann

$$dV = dx dy dz, \quad (1.6)$$

$$d\Omega d\nu = \sin\theta d\theta d\phi d\nu = d\mu d\phi d\nu. \quad (1.7)$$

Beachten wir, daß sich bei der freien Bewegung von Photonen weder die Frequenz noch deren Richtung ändert ($\dot{\nu} = \dot{\mu} = \dot{\phi} = 0$) und daß der Geschwindigkeitsvektor gegeben ist durch $\dot{\mathbf{q}} = c \boldsymbol{\Omega}$, so kann die linke Seite von Gl. (1.4) geschrieben werden als

$$\frac{df(\nu, \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}, t)}{dt} = \frac{\partial f(\nu, \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}, t)}{\partial t} + c \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla f(\nu, \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}, t). \quad (1.8)$$

Um die Streuwahrscheinlichkeit pro Zeit zu erhalten, betrachten wir zunächst den differentiellen Streukoeffizienten $\sigma_s(\mathbf{r}, \nu_1 \rightarrow \nu, \boldsymbol{\Omega}_1 \cdot \boldsymbol{\Omega})$, welcher die Wahrscheinlichkeit für die Streuung eines Photons von der Frequenz ν_1 nach ν im Element $d\nu$ und von $\boldsymbol{\Omega}_1$ nach $\boldsymbol{\Omega}$ im Element $d\Omega$ für eine Wegstrecke ds ist (siehe Pomraning 1973). Um den Streuterm \mathcal{S} zu erhalten, müssen wir die Wahrscheinlichkeit für die Streuung *in* das infinitesimale Phasenraumvolumen Δ und aus diesem *heraus* angeben. Dabei müssen wir jeweils über alle möglichen Richtungen und Frequenzen der Photonen integrieren. Damit erhalten wir für Gl. (1.5), unter Benutzung von Gl. (1.8)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\nu, \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}, t)}{\partial t} + c \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla f(\nu, \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}, t) = \mathcal{Q} \\ + c \int_0^\infty d\nu_1 \int_{4\pi} d\Omega_1 \left[\sigma_s(\mathbf{r}, \nu_1 \rightarrow \nu, \boldsymbol{\Omega}_1 \cdot \boldsymbol{\Omega}) f(\nu_1, \boldsymbol{\Omega}_1, \mathbf{r}, t) \right. \\ \left. - \sigma_s(\mathbf{r}, \nu \rightarrow \nu_1, \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}_1) f(\nu, \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}, t) \right]. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Dies ist eine spezielle Form der linearisierten Boltzmann–Gleichung für Teilchen mit der gleichen Geschwindigkeit (siehe Cercignani 1988), die wir abkürzend Boltzmann–Gleichung nennen. Die Linearität ist eine Folge davon, daß wir die Wechselwirkung der Photonen untereinander vernachlässigen können. Charakteristisch für den Boltzmann–Stoßterm ist jedoch seine Integralform. Diese drückt die Eigenschaft der Photonenstreuung aus, bei der die Energie und Richtung der Photonen um nicht–infinitesimale Beträge geändert werden können und bei der die Zeit für individuelle Streuprozesse sehr viel kleiner als die Zeit dazwischen ist. Diese Eigenschaften sind charakteristisch für ungeladene Teilchen wie Neutronen oder Gasatome. Auf die Beschreibung der letzteren geht die Boltzmann–Gleichung ursprünglich zurück. Der erste Summand im Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung stellt quasi die Erzeugung von Photonen bei der Frequenz ν dar, die durch Streuung von Photonen bei der Frequenz ν_1 entstanden sind. Man nennt diesen Term deshalb auch *Quellfunktion*. Diese ist zu unterscheiden von einer unabhängigen Photonenquelle (oder Senke³), die durch den Term \mathcal{Q}

³Im Gegensatz zu einer unabhängigen Photonenquelle ist ein Absorptionsterm proportional zu der Photonendichte $f(\nu, \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}, t)$.

dargestellt wird.

An Stelle der Phasenraumdichte $f(\nu, \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}, t)$ führen wir nun die spezifische Intensität ein:

$$I(\nu, \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}, t) = c h \nu f(\nu, \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}, t). \quad (1.10)$$

Sei θ der Winkel zwischen der Photonenrichtung $\boldsymbol{\Omega}$ und der Normalen einer Fläche $d\sigma$, so ist $I(\nu, \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}, t) \cos \theta$ die Energie, die in der Zeit dt pro Raumwinkel- und Frequenzintervall $d\Omega d\nu$ unter dem Winkel θ durch diese Fläche $d\sigma$ geht. Dies kann ausgedrückt werden durch

$$dE = I(\nu, \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}, t) \cos \theta d\nu d\Omega d\sigma dt. \quad (1.11)$$

Zur Beschreibung von polarisiertem Licht müssen wir je eine Gleichung für die beiden Komponenten des Polarisationsvektors entlang der Achsen eines orthogonalen Koordinatensystems senkrecht zur Photonenausbreitung aufstellen. Diese Transportgleichungen sind gekoppelt. Die Intensität setzt sich dann aus den Einzelintensitäten gemäß $I = I_r + I_l$ zusammen, wobei I_r und I_l jeweils die Quadrate der Maximalamplituden der beiden Einzelkomponenten sind. Eine Beschreibung der Intensität mit einer über die Polarisationszustände gemittelten skalaren Funktion I ist streng nur für unpolarisiertes Licht gültig und stellt i.A. eine Näherung dar (siehe Pomraning 1973). Im weiteren Verlauf dieser Arbeit soll aber von dieser Näherung Gebrauch gemacht werden.

Die analytische Lösung der Gl. (1.9) ist nur für besondere Streuterme (Modelle) und Randbedingungen möglich. Wir sind an einer stationären Lösung dieser Gleichung für Photonenstreuung an heißen Elektronen (Comptonisierung) in einer Scheibe interessiert (Kapitel 2). Für extrem stark vereinfachte Streufunktionen ist die Lösung der Boltzmann-Gleichung sehr oft der Gegenstand von analytischen Untersuchungen gewesen. Man kann für den Fall einer konstanten oder linear vom Kosinus des Streuwinkels $\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}_1$ abhängigen Streufunktion im Grenzfall einer sehr dicken Scheibe eine analytische Lösung angeben. Dieses Problem ist z.B. im Zusammenhang mit Neutronenstreuung untersucht worden (Case & Zweifel 1967). Eine neuere Darstellung von analytischen Ergebnissen zur Lösung der Boltzmann-Gleichung, mit Anwendungen in der Strahlungstheorie für dicke Atmosphären, stellt die Arbeit von Kušcer & McCormick (1991) dar. Darüber hinaus ist diese Gleichung auch im Zusammenhang mit der Untersuchung von Strahlungsdurchgang durch menschliches Gewebe analytisch untersucht worden (siehe z.B. Mahan 1995). Ein Anriß der Lösungsmöglichkeiten für den Fall einer linearen Streufunktion ist im Anhang A dargestellt. Alle diese angesprochenen Lösungen der Boltzmann-Gleichung haben jedoch gemeinsam, daß sie nur den Transport von Photonen (oder Neutronen), nicht jedoch deren Energiegewinn bzw. Beschleunigung berücksichtigen. Die in Kapitel 2 dargestellte Methode zur

Lösung der Boltzmann–Gleichung ist nun geeignet, das Problem des Transportes von Photonen im Orts– und Impulsraum semi–analytisch zu lösen. Dabei wird die Boltzmann–Gleichung auf ein algebraisches Eigenwertproblem zurückgeführt, das dann sehr leicht numerisch zu lösen ist. Der Vorteil gegenüber anderen Methoden besteht nicht nur in dem verhältnismäßig kleinen numerischen Aufwand, sondern auch darin, daß die vollständige Winkel– und Ortsabhängigkeit der Eigenfunktionen erhalten werden kann.

Die Fokker–Planck–Näherung

Für die Beschreibung des Transportes von Photonen wurde sehr oft von Näherungen der Boltzmann–Gleichung Gebrauch gemacht, die auf eine differentielle Transportgleichung führen, wie sie von Fokker und Planck benutzt wurde (siehe van Kampen 1997). Bei einer isotropen Photonenverteilung kann durch die Annahme von kleinen Änderungen in der Photonenenergie eine solche Gleichung angegeben werden. Diese wurde zunächst von Kompaneets (1957) abgeleitet. Im folgenden soll diese Gleichung angegeben werden und auf eine allgemeinere Fokker–Planck–Gleichung erweitert werden. Wir führen dazu für eine homogene und isotrope Verteilung eine Besetzungszahl des Photonengases

$$n(\nu, t) = \frac{c^2}{2h\nu^3} I(\nu, t) \quad (1.12)$$

sowie eine dimensionslose Zeit, Frequenz sowie Temperatur ein:

$$t_c = \sigma_T n_e c t, \quad x = \frac{h\nu}{m_e c^2}, \quad \Theta = \frac{k_B T_e}{m_e c^2}, \quad (1.13)$$

wobei $\sigma_T = 6.65 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$ der Thomson–Wirkungsquerschnitt und n_e die Dichte der freien Elektronen ist. Berücksichtigen wir hier die Änderung von $n(x, t_c)$ durch induzierte Emission, so erhalten wir einen zu Gl. (1.9) analogen Ausdruck:

$$x^2 \frac{\partial n(x, t_c)}{\partial t_c} = \int_0^\infty dx_1 \left\{ \tilde{\sigma}(x_1 \rightarrow x, t_c, \Theta) n(x_1, t_c) [1 + n(x, t_c)] - \tilde{\sigma}(x \rightarrow x_1, t_c, \Theta) n(x, t_c) [1 + n(x_1, t_c)] \right\}, \quad (1.14)$$

wobei die Temperaturabhängigkeit der Streufunktion $\tilde{\sigma}$, die nun die Winkelintegration über $d\Omega$ enthält, explizit hervorgehoben wurde.

Ist nun bei kleiner Elektronentemperatur die Photonenenergie ebenfalls klein, so gewinnen die Photonen bei jeder Streuung nur sehr wenig Energie:

$$x < \Theta \ll 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 - x \ll x \quad \Rightarrow \quad \Delta := \frac{x_1 - x}{\Theta} \ll 1. \quad (1.15)$$

Die rechte Seite der Gl. (1.14) kann nun nach dem kleinen Parameter Δ entwickelt werden. Bei einer Entwicklung bis zur zweiten Ordnung erhält man für klassische Thomson–Streuung und eine Maxwell–Verteilung der Elektronen die Kompaneets–Gleichung (siehe auch Rybicki & Lightman 1979):

$$x^2 \frac{\partial n}{\partial t_c} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ x^4 \left[\Theta \frac{\partial n}{\partial x} + n(1+n) \right] \right\}, \quad (1.16)$$

welche eine spezielle Fokker–Planck–Gleichung darstellt. Den Termen läßt sich eine separate Bedeutung zuschreiben. Die Ableitung der Besetzungszahl nach x stellt die durch den Doppler–Effekt beschreibbare Änderung von n dar, während der lineare Term durch den Rückstoß des Elektrons verursacht wird. Der quadratische Term beschreibt induzierte Emission. Eine Gleichgewichtslösung ist durch die einer Planckschen Verteilung entsprechenden Besetzung $n = (\exp(x/\Theta) - 1)^{-1}$ gegeben.

Die Kompaneets–Gleichung kann durch Einführen eines Diffusions–Koeffizienten $D(x, \Theta)$ verallgemeinert werden:

$$x^2 \frac{\partial n}{\partial t_c} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ D(x, \Theta) \left[\Theta \frac{\partial n}{\partial x} + n(1+n) \right] \right\}. \quad (1.17)$$

Für ein relativistisches Elektronengas und Klein–Nishina–Streuung haben Prasad et al. (1988) einen Diffusions–Koeffizienten bestimmt, in dem sie verlangt haben, daß die Änderung der Energie

$$\frac{dE}{dt_c} = \int_0^\infty dx x^3 \frac{\partial n}{\partial t_c} \quad (1.18)$$

bei der durch die Boltzmann–Gleichung (1.14) gegebenen Besetzungszahl n identisch ist zu der Größe dE/dt_c , wenn n durch die Fokker–Planck–Gleichung (1.17) gegeben ist.

1.1.2 Beschreibung geladener Teilchen

Die Annahme der verschwindenden gegenseitigen Wechselwirkung der einzelnen Teilchen, welche zur Gl. (1.4) geführt hat, ist für die hochenergetischen Elektronen eines astrophysikalischen Plasmas eine ebenso gute Annahme wie für die kosmische Strahlung. Die Teilchen wechselwirken mit dem Hintergrundplasma über das magnetische Feld, in dem sie sich ständig bewegen. In der Liouville–Gleichung (1.4) ist nun die Lorentz–Kraft $\dot{\mathbf{p}} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}/c)$ einzusetzen.⁴ Unter der Voraussetzung, daß das Plasma eine sehr hohe Leitfähigkeit besitzt, können wir ein Koordinatensystem wählen, in dem ein evtl. vorhandenes elektri-

⁴Nach Transformation zu den Koordinaten: $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{x}$, $\dot{\mathbf{q}} \rightarrow \mathbf{v}$, und $m\dot{\mathbf{q}} \rightarrow \mathbf{p}$.

sches Feld verschwindet. Wenn wir ferner Gyrotropie annehmen, bei der die Verteilungsfunktion unabhängig von der Gyrophase ist, so verschwindet der rechte Term von Gl. (1.4) vollständig.

Bei der Bewegung geladener Teilchen in einem Magnetfeld ist die lange Reichweite der elektromagnetischen Wechselwirkung von Bedeutung. Die Teilchen werden durch Störungen beeinflusst, welche sich in Form von Alfvén-Wellen entlang des Feldes ausbreiten (Jokipii 1971). Diese Störungen bewegen sich z.B. in Supernova-Überresten mit einer Geschwindigkeit von etwa 100 km s^{-1} , während die Unterschiede der Plasmageschwindigkeiten an Stoßfronten um eine Größenordnung höher liegen. Wir können daher die Änderung des Impulsbetrages durch diese Wellen vernachlässigen. Da die Zahl der Teilchen selbst erhalten ist, bleibt für die Änderungen der Phasenraumdicke auf der rechten Seite von Gl. (1.5) eine Diffusion durch zufällige Streuungen in der Richtung zu berücksichtigen. Da die Längen- und Zeitskalen der Gyrationbewegung hochenergetischer Teilchen im Vergleich zu makroskopischen Skalen klein sind, können wir Gyrotropie annehmen. Damit ist die Richtung der Teilchen eindeutig durch den Pitchwinkel⁵ $\mu = \mathbf{p} \cdot \mathbf{B}/(pB)$ zwischen Impuls und Magnetfeldrichtung beschrieben. Im Ruhesystem des Plasmas lautet die Transportgleichung für die Phasenraumdicke $f(\mathbf{x}, p, \mu, t)$ geladener Teilchen dann (vgl. Blandford & Eichler 1987; Kirk et al. 1994)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mu} \left(D_{\mu\mu} \frac{\partial f}{\partial \mu} \right), \quad (1.19)$$

wobei der Pitchwinkel-Diffusionskoeffizient $D_{\mu\mu}$ die Änderung des Pitchwinkels pro Zeitintervall angibt. Wir gehen nun zu einem Koordinatensystem über, in dem der Ort der Teilchen in einem System gemessen wird, in dem sich das Plasma mit der Geschwindigkeit \mathbf{u} bewegt (Laborsystem) aber die Messung des Impulses weiterhin in diesem mit \mathbf{u} bewegten System stattfindet. Wir nehmen an, daß die Pitchwinkelstreuung so effektiv ist, daß die Verteilung in erster Näherung als isotrop angesehen werden kann, d.h.

$$f(\mathbf{x}, p, \mu, t) = f^{(0)}(\mathbf{x}, p, t) + f^{(1)}(\mathbf{x}, p, \mu, t), \quad (1.20)$$

$$\text{mit} \quad \int_{-1}^1 d\mu f^{(1)}(\mathbf{x}, p, \mu, t) = 0 \quad (1.21)$$

$$\text{und} \quad f^{(0)} \gg f^{(1)}. \quad (1.22)$$

Damit läßt sich nun für eine nicht-relativistische Strömungsgeschwindigkeit, die viel kleiner als die Teilchengeschwindigkeit ist ($u \ll c^2 p/E$), eine Transportglei-

⁵Die Größe $\mu = \cos \alpha$ ist der Kosinus des Winkels α zwischen Teilchenimpuls und Magnetfeldrichtung. Die Bezeichnung Pitchwinkel wird hier (falls nicht explizit anders angegeben) für μ benutzt.

chung für den isotropen Anteil der Phasenfunktion angeben (Parker 1965; Gleeson & Axford 1967; Skilling 1975; Drury 1983):

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f^{(0)} - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u}) p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} = \nabla \cdot (\kappa \nabla f^{(0)}), \quad (1.23)$$

wobei κ der Diffusionstensor ist. Dieser beschreibt die Diffusion senkrecht und parallel zu dem Magnetfeld. Bei einer Teilchenbewegung ausschließlich entlang eines Magnetfeldes reduziert sich dieser Diffusionstensor auf eine skalare Funktion für den parallelen Anteil, der von dem oben eingeführten Pitchwinkel-Diffusionskoeffizienten abhängig ist (Hasselmann & Wibberentz 1970; Jokipii 1971; Decker 1988; Kirk et al. 1994; Kuijpers 1996):

$$\kappa_{\parallel} = \frac{v^2}{8} \int_{-1}^1 d\mu \frac{(1 - \mu^2)^2}{D_{\mu\mu}}, \quad (1.24)$$

wobei $D_{\mu\mu}$ durch die mittlere quadratische Änderung des Pitchwinkels pro Streuzzeit ausgedrückt werden kann:

$$D_{\mu\mu} = \frac{1}{2} \frac{\langle (\Delta\mu)^2 \rangle}{\Delta t}. \quad (1.25)$$

Die Transportgleichung (1.23) für die Phasenraumdicke wird oft in Form einer sog. Diffusions-Konvektions-Gleichung für die Teilchendichte $n(x, p)$ geschrieben, die hier im Hinblick auf spätere Anwendungen angegeben werden soll. Wir betrachten dazu ein eindimensionales Problem. Die Dichte der Teilchen an der Stelle x mit Impuls p ist dann gegeben durch

$$n(x, p, t) = 4\pi p^2 f^{(0)}(x, p, t). \quad (1.26)$$

Damit wird Gl. (1.23) zu (vgl. Jones & Ellison 1991)

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u n + F) = \frac{1}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial p}(p n), \quad (1.27)$$

wobei F einen Teilchenfluß darstellt, der gemäß dem 1. Fickschen Gesetz linear zur ersten Ableitung der Teilchendichte ist:

$$F = -\kappa \frac{\partial n}{\partial x}. \quad (1.28)$$

Der zweite Term der Gl. (1.27) stellt somit die Änderung der Teilchendichte durch einen Konvektionsstrom ($u n$) und einen Diffusionsstrom (F) dar, dem eine Änderung durch einen Impulsstrom ($\propto p n$) gegenübersteht. Betrachten wir diese Gleichung zunächst für einen kontinuierlichen Plasmastrom ($\partial u / \partial x = 0$), so

erhalten wir eine Gleichung für die Dichte n , die im mitbewegten System identisch mit der Wärmeleitungsgleichung ist (siehe Landau & Lifschitz 1991).⁶ Der die Teilchenbewegung beschreibende Propagator ist eine Lösung dieser Gleichung, die für $t = 0$ eine δ -Funktion für x darstellt:

$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi \kappa t}} e^{-x^2/4\kappa t}. \quad (1.29)$$

Die spezielle Form des Diffusionsflusses (1.28) führt daher auf einen Propagator, der durch eine Gauß-Kurve beschrieben wird. Daraus lassen sich einige Konsequenzen ableiten. Zunächst berechnen wir die mittlere Verschiebung der Teilchen als Funktion der Zeit und finden

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle \propto t, \quad (1.30)$$

was als charakteristisch für diffusive Teilchenbewegung betrachtet wird. Der Einfluß eines solchen Propagators auf das Dichteprofil von kontinuierlich in ein fließendes Plasma injizierter Teilchen wird in Zusammenhang mit dem Propagator für *sub*-diffusiven Transport in Kapitel 3.2 diskutiert.

1.2 Anomaler Transport

Der räumliche Transport geladener Teilchen wird im wesentlichen bestimmt durch die Eigenschaften des magnetischen Feldes. Durch turbulente Bewegungen des Plasmas entsteht eine stochastische Komponente dieses Magnetfeldes. Dabei sind die Längenskalen von Bedeutung, die charakteristisch für diese Störungen sind. Während sich kurzwellige Fluktuationen ungedämpft in Form von z.B. Alfvén-Wellen entlang des Feldes ausbreiten und mit den Teilchen in Form von Pitchwinkelstreuung wechselwirken, haben die langwelligen Störungen Einfluß auf die räumliche Verteilung des Feldes, die entscheidend für das anomale Transportverhalten ist. Die resultierende Feldgeometrie ist homogen, d.h. an jedem Raumpunkt im Prinzip gleich, jedoch kann trotzdem dieselbe Teilchenbewegung (gemäß der Freiheitsgrade des Teilchens) bei verschiedenen Zeitpunkten zu unterschiedlichen räumlichen Bewegungen führen. Das bedeutet, in diesem Fall ist die Teilchenbewegung nicht nur durch die Magnetfeldrichtung und -stärke an der momentanen Position abhängig, sondern auch von dem Verhalten der Teilchen zu früheren Zeiten.

Die elementaren Eigenschaften der Teilchenbewegung bei anomalem Transport können in Form eines Propagators ausgedrückt werden, der sich von Gl. (1.29) unterscheidet, die für den Fall des klassischen Transportes abgeleitet

⁶Der Diffusionskoeffizient κ sei unabhängig von x .

wurde. Das Ziel ist, für ein stochastisches Magnetfeld, wie es bei Stoßfronten in Supernova-Überresten auftreten kann, eine Transportgleichung aufzustellen und als Lösung diesen Propagator zu finden. Während die räumliche Bewegung bei klassischem und anomalem Transport unterschiedlich ist, gilt dies nicht für die Dynamik der Impulsänderung bei der Wechselwirkung mit der Stoßfront. Wir werden zur analytischen Bestimmung der spektralen Eigenschaften daher eine allgemeine Konvektions-Diffusions-Gleichung aufstellen und lösen (Kap. 3.1.1). Mit der Kenntnis des Teilchenpropagators lassen sich dann die speziellen Eigenschaften von dem hier erhaltenen Fall von *sub*-Diffusion implementieren.

Der Einfluß stochastischer Magnetfeldlinien als Folge turbulenter Bewegung von astrophysikalischen Plasmen auf die diffusive Bewegung von kosmischen Strahlen wurde von Jokipii & Parker (1969a; 1969b) eingehend untersucht. Diese Autoren haben die Auswirkungen dieses Feldes auf Fokker-Planck-Diffusionskoeffizienten berechnet. Stix (1973) hat die Zerstörung magnetischer Oberflächen durch eine stochastische Komponente des Magnetfeldes in Fusionsplasmen beschrieben. Nach einer Reihe von Arbeiten (Fusionsplasmen: Rechester & Rosenbluth 1978; Kadomtsev & Pogutse 1979; Isichenko 1991; Rax & White 1992; Kosmische Strahlen: Barge et al. 1984) konnte eine Beschreibung dieser neuen Klasse des Transportverhaltens entwickelt werden (Chuvilgin & Ptuskin 1993; Balescu et al. 1994; Wang et al. 1995; Balescu 1995). Die Auswirkungen dieses anomalen Transportes auf das Spektrum der kosmischen Strahlen, bzw. das Synchrotronpektrum von hochenergetischen Elektronen, wurde von Kirk et al. (1996) und Ragot & Kirk (1997) untersucht. Dies wird in Kapitel 3 näher dargestellt. Hier wird zunächst die Transportgleichung bei stochastischem Magnetfeld angegeben. Wir betrachten dazu ein Magnetfeld mit einer konstanten Hauptkomponente \mathbf{B}_0 in z -Richtung, dem stochastische Fluktuationen $\delta\mathbf{B}$ senkrecht dazu überlagert sind (vgl. Balescu et al. 1994):

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(z) &= \mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B}(z) \\ &= B_0(\mathbf{e}_z + b_x(z)\mathbf{e}_x + b_y(z)\mathbf{e}_y).\end{aligned}\tag{1.31}$$

Wir verlangen, daß die Komponente senkrecht zu \mathbf{B}_0 sehr klein ist im Vergleich zu \mathbf{B}_0 selbst, und definieren ein Maß δb dafür:

$$\delta b := \frac{\langle |\delta\mathbf{B}| \rangle}{|\mathbf{B}_0|} \ll 1.\tag{1.32}$$

Wir nehmen an, daß diese Fluktuationen unabhängig von der Zeit sind, d.h. sie sind im Plasma eingefroren. Außerdem seien sie nur von *einer* Koordinate z entlang \mathbf{B}_0 abhängig. Das bedeutet, die Größe der Auslenkung eines (z.B.) Teilchens senkrecht zu \mathbf{B}_0 ist nicht von dieser Entfernung selbst abhängig. Diese Näherung wird quasi-linear genannt (siehe Kadomtsev & Pogutse 1979).

Durch eine Feldbeschreibung gemäß Gl. (1.31) ist das Verschwinden der Divergenz automatisch sichergestellt:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.33)$$

Eine Transportgleichung für Teilchen, die sich diffusiv entlang der Magnetfeldlinien bewegen, muß nun die stochastische Eigenschaft dieser Feldlinien berücksichtigen. Balescu (1995) konnte zeigen, daß die charakteristischen Eigenschaften des Transportverhaltens auch bei anomalem Transport unabhängig von der Dimension d des Raumes sind, in dem die Bewegung der Teilchen beschrieben wird. Wir beschränken uns daher auf die Untersuchung des Transportes von Teilchen in *einer* Dimension x senkrecht zu \mathbf{B}_0 , während die Bewegung der Teilchen zunächst abhängig von x und z beschrieben werden muß. Die Bewegungsgleichungen lauten dann (siehe Balescu et al. 1994)

$$\frac{dx(t)}{dt} = b(z(t)) v_z(t) + \epsilon \eta_{\perp}(t), \quad (1.34)$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = v_z(t) = \eta_{\parallel}(t), \quad (1.35)$$

wobei $\eta_{\perp}(t)$ (ebenso wie v und b) eine stochastische Größe darstellt, die aber zu einer Bewegung senkrecht zur Magnetfeldlinie beiträgt und so zu einer Dekorrelation der Teilchen von dieser Feldlinie führt. Der dimensionslose Parameter $\epsilon \in [0, 1]$ gibt die tatsächliche Größe dieses Effektes an. Wir betrachten hier zunächst Teilchen, die keiner Dekorrelation unterliegen. In diesem Fall ist $\eta_{\perp} = 0$ bzw. $\epsilon = 0$. Auf der Grundlage einer Dichteverteilung $f(x, z, t)$ mit stochastischem Charakter bezüglich der Teilchengeschwindigkeit v und den Feldfluktuationen b hat Balescu (1995)⁷ eine kinetische Gleichung in Analogie zur Liouville-Gleichung (1.4) angegeben:

$$\frac{\partial}{\partial t} f + v(t) \frac{\partial}{\partial z} f + v(t) b(z(t)) \frac{\partial}{\partial x} f = 0. \quad (1.36)$$

Die Teilchendichte $n(x, t)$ ergibt sich nun aus $f(x, z, t)$ durch eine doppelte Mittelwertbildung über v und b . Diese ist gegeben durch

$$n(x, t) = \langle \langle f(x, z, t) \rangle \rangle_{v,b}, \quad (1.37)$$

wobei die Abhängigkeit von z wegen der Homogenität entlang dieser Richtung verschwindet. Diese Mittelwertbildung führt zu einer Gleichung für *sub*-diffusiven Transport. Eine allgemeinere Form dieser Gleichung kann mit Hilfe der Methode „zeitlich fortwährender Zufalls-Schritte“ (CTRW)⁸ erhalten werden. Dies geschieht auf der Grundlage des von Montroll & Weiss (1965) formulierten Problems

⁷Für eine allgemeinere Form siehe auch Balescu et al. (1994) und Chuvilgin & Ptuskin (1993).

⁸Continuous Time Random Walks

der Bestimmung der Dichteverteilung bei einer stochastischen Bewegung auf einem Gitter, bei vorgegebener Verteilung der möglichen räumlichen und zeitlichen Schrittgrößen $f(\mathbf{x})$ und $\Psi(t)$ für $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ und $t \rightarrow \infty$. Diese Verteilungen werden in Form ihrer Fourier- und Laplace-Transformationen ($\tilde{f}(\mathbf{k}) = \mathcal{F}[f(\mathbf{x})]$ und $\hat{\Psi}(s) = \mathcal{L}[\Psi(t)]$) angegeben (siehe Balescu 1995; Ragot & Kirk 1997):

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = 1 - \frac{1}{2d} \sigma^\beta |\mathbf{k}|^\beta, \quad |\mathbf{k}| \rightarrow 0, \quad (1.38)$$

$$\hat{\Psi}(s) = 1 - \tau_D^\alpha s^\alpha, \quad s \rightarrow 0, \quad (1.39)$$

wobei $0 < \alpha, \beta \leq 2$ und τ_D, σ positive Konstanten sind. Wir betrachten hier den Fall $\beta = 2$, bei dem die quadratische Verschiebung $\langle (\Delta x)^2 \rangle$ zu jeder Zeit endlich ist.⁹ Dies führt für $\alpha = 1/2$ auf eine Transportgleichung, die der durch den Ansatz einer kinetischen Gleichung (im Grenzfall kollisionsfreier Bewegung und großer Zeiten) erhaltenen, äquivalent ist (Balescu 1995; siehe auch Chuvilgin & Ptuskin 1993):

$$\frac{\partial}{\partial t} n(x, t) = D_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} n(x, t) - H_0 \int_{\tau_{\min}}^t d\tau \left(\frac{\tau_D}{\tau} \right)^{2-\alpha} \frac{\partial^2}{\partial x^2} n(x, t - \tau), \quad (1.40)$$

wobei die Koeffizienten gegeben sind durch

$$D_0 = \frac{\sigma^2}{2d\tau_D}, \quad H_0 = \frac{1 - \alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{D_0}{\tau_D}, \quad (1.41)$$

und $\tau_{\min} = \tau_D [\Gamma(\alpha)]^{-1/(1-\alpha)} = \tau_D/\pi$ für $\alpha = 1/2$. Gleichung (1.40) ist eine nicht-Markovische Transportgleichung. Der Integralterm spiegelt dabei das Langzeit-„Gedächtnis“ der Teilchenbewegung wider. Für $\alpha = 1$ verschwindet H_0 und damit der Integralterm; man erhält in diesem Fall die klassische Diffusionsgleichung (vgl. Gl. 1.27 im Zusammenhang mit der Lösung 1.29). Die quadratische Verschiebung wird mit den Lösungen dieser Transportgleichung zu

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \frac{\sigma^2}{\Gamma(1 + \alpha)} \left(\frac{t}{\tau_D} \right)^\alpha, \quad (1.42)$$

was unabhängig von der Dimension d des Raumes ist. Als Spezialfälle erhält man für $\alpha = 1$ das klassische Ergebnis (1.30) und für $\alpha = 2$ das Verhalten einer freien (ballistischen) Bewegung. Dazwischen ($1 < \alpha < 2$) nennt man den Transport *super*-Diffusion, und der Bereich $0 < \alpha < 1$ entspricht *sub*-Diffusion.

Die freien Parameter der CTRW-Methode müssen nun durch Parameter ersetzt werden, die das vorgegebene Magnetfeld und die Teilchenbewegung in diesem beschreiben. Für ein räumlich diffundierendes Magnetfeld, wie es durch

⁹ $\beta < 2$ entspricht Lévy-Transport.

Gl. (1.31) dargestellt wird, können wir die entsprechende quadratische Verschiebung entlang der z -Achse in der quasi-linearen Näherung angeben gemäß $\langle(\Delta x(z))^2\rangle = 2D_M z$ (die Diffusivität D_M des Magnetfeldes werden wir in Kap. 3.3.2 näher bestimmen). Die Diffusion der Teilchen *entlang* der Magnetfeldlinie wird durch den Koeffizienten κ_{\parallel} bestimmt gemäß $\langle(\Delta z(t))^2\rangle = 2\kappa_{\parallel} t$ (siehe Gl. 1.24). Benutzen wir nun die Beziehung $z(t) \simeq \sqrt{\langle(\Delta z(t))^2\rangle}$, so erhalten wir

$$\langle(\Delta x(t))^2\rangle \propto \sqrt{t}. \quad (1.43)$$

Dies entspricht *sub*-Diffusion mit $\alpha = 1/2$. Eine entsprechende Lösung der Transportgleichung (1.40), die bei $t = 0$ eine δ -Funktion darstellt, wurde von Kirk et al. (1996) und Duffy et al. (1995) benutzt, um den Transport von Teilchen in stochastischen astrophysikalischen Magnetfeldern zu beschreiben:

$$P_{\text{sub}}(x, t) = \frac{1}{4\pi\sqrt{D_M\kappa_{\parallel}t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{|s|}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D_M|s|} - \frac{s^2}{4\kappa_{\parallel}t}\right). \quad (1.44)$$

Dieser Propagator stellt die Grundlage für die hier zu betrachtende anomale Teilchenbewegung dar, die in Kapitel 3.2 näher untersucht wird. Er stellt eine Faltung zweier Gaußscher Verteilungen dar, die der stochastischen Bewegung entlang des Feldes und des Feldes im Raum entsprechen. Rax & White (1992) haben eine Näherung dieser Funktion zur Beschreibung von *sub*-diffusivem Teilchentransport in Fusionsplasmen benutzt.

Kapitel 2

„Beschleunigung“ von Photonen: Comptonisierung

In der Richtung astrophysikalischer Objekte wie Aktive Galaxien, Quasare und Röntgendoppelsterne beobachtet man häufig ein nicht-thermisches kontinuierliches Spektrum im Energiebereich der Röntgenstrahlung. Niederenergetische Photonen können durch Streuung an freien thermischen Elektronen Energie gewinnen und so vom optischen bzw. ultravioletten Spektralbereich bis in den Röntgenbereich ein kontinuierliches Spektrum bilden. Man erwartet, daß die o.g. Objekte ausgedehnte Regionen mit heißem Plasma enthalten, die für diese Strahlung verantwortlich sind. Der Prozeß der Streuung von Photonen an freien heißen Elektronen wird Comptonisierung genannt. Der einfachste Fall der Streuung von Photonen an Elektronen ist die Thomson-Streuung.¹ Hierbei streuen Photonen niedriger Energie $h\nu \ll m_e c^2$ rückstoßfrei an freien Elektronen. Durch Faltung mit der Verteilungsfunktion der Elektronen erhält man aus dem Wirkungsquerschnitt der Compton-Streuung einen effektiven Streuquerschnitt für die Comptonisierung. Nicht nur die räumliche Verteilung, auch das Spektrum der an den Elektronen gestreuten Strahlung, hängt aber noch entscheidend von dem Transport der Photonen im Plasma ab. Es ist also nötig, eine Transportgleichung für den Orts- und Impulsraum aufzustellen und zu lösen. Dazu gingen frühere Arbeiten sehr oft von der Annahme aus, daß die optische Tiefe der Streuregion groß ist und daß sowohl die Frequenz der Photonen ν als auch die Elektronentemperatur T_e klein sind, das bedeutet: $x \equiv h\nu/m_e c^2 \ll 1$ und $\Theta \equiv k_B T_e/m_e c^2 \ll 1$. Der Transport der Photonen im Orts- sowie im Impulsraum kann dann durch eine Fokker-Planck-Gleichung (siehe Kapitel 1.1.1) beschrieben werden. Das Problem läßt sich dabei in zwei Teile zerlegen: Die Berechnung der Verteilung der Anzahl von Streuungen, die ein Photon erfährt, und die Faltung mit der Lösung für

¹Dabei werden quantenmechanische Effekte zunächst vernachlässigt. Die Berücksichtigung dieser Effekte wird mit dem Klein-Nishina-Streuquerschnitt beschrieben.

das Energiespektrum von Photonen in einem homogenen unendlich ausgedehnten Medium (Sunyaev & Titarchuk 1980).

Mehrere Autoren haben daraufhin Methoden gefunden, um Ergebnisse mit größerem Anwendungsbereich zu finden. So wurde z.B. der Diffusionskoeffizient der Fokker–Planck–Gleichung für höhere Ordnungen in x und Θ berechnet (Prasad et al. 1988; Cooper 1971). Von besonderem Interesse ist die Erweiterung auf optische Tiefen im Bereich von $\tau \sim 1$, da solche Bedingungen in vielen astrophysikalischen Objekten gegeben sind (z.B. in Aktiven Galaktischen Kernen: Haardt et al. 1994; Zdziarski et al. 1995; und Kandidaten für schwarze Löcher: Sunyaev & Trümper 1979; Ebisawa et al. 1996). Von Sunyaev & Titarchuk (1985) wurde unter der Annahme der oben erwähnten Separabilität eine iterative Lösung für den räumlichen Transport der Photonen in einer Scheibe angegeben, welche wieder mit der Lösung für Diffusion im Impulsraum kombiniert werden kann. Eine Zusammenfassung dieser Lösungsmethoden und deren Anwendung auf die Beschreibung astrophysikalischer Objekte wurde von Titarchuk (1994) gegeben, welcher darauf hinwies, daß comptonisierte Strahlung von einer heißen Scheibe mit kleiner optischen Tiefe sehr stark in Richtung der Oberfläche dieser Scheibe kollimiert sei. — Ergänzend zu analytischen Arbeiten ist Comptonisierung auch mit Hilfe numerischer Verfahren (Katz 1976; Poutanen & Svensson 1996) und insbesondere der Monte–Carlo–Methode untersucht worden (Pozdnyakov et al. 1983; Zdziarski 1986; Hua & Titarchuk 1995; Stern et al. 1995a, 1995b).

In einer neueren Arbeit haben Titarchuk & Lyubarskij (1995) die Boltzmann–Gleichung benutzt, um das Problem der Comptonisierung zu lösen. Diese Autoren konnten das Ergebnis bestätigen, daß ein Potenzgesetz–Spektrum produziert wird, wenn niederenergetische Strahlung im Thomson–Bereich gestreut wird (d.h. wenn für die dimensionslose Photonenenergie im Elektronenruhesystem gilt $x' \ll 1$). Sie haben die Berechnung des Spektralindex des Potenzgesetzes auf eine Eigenwertgleichung für die Quellfunktion reduziert, vorausgesetzt diese Quellfunktion kann als winkelunabhängig betrachtet werden (vgl. Sobolev 1975). In diesem Fall ist das Problem wieder in Orts– und Impulsraum separierbar. Titarchuk & Lyubarskij (1995) haben jeweils analytische Näherungen gefunden für den Fall $\Theta \ll 1$ und $\Theta \gg 1$, sowie für die Lösung des Problems im Ortsraum bei $\tau_0 \ll 1$ und $\tau_0 \gg 1$ und verschiedenen Geometrien. Sie haben dann Interpolationsformeln angegeben, die für weite Bereiche von Θ und τ_0 gültig sind.

In diesem Kapitel wird eine Erweiterung des Zugangs von Titarchuk & Lyubarskij (1995) dargestellt, indem die Boltzmann–Gleichung ohne Annahme einer isotropen Strahlung oder Quellfunktion gelöst wird. Wir berechnen den Spektralindex aus einem Eigenwertproblem für die vollständige integrale Quellfunktion. Um die Eigenfunktionen zu finden, wird die Winkelabhängigkeit in Legendre–Polynome und die Ortsabhängigkeit in Tschebyscheff–Polynome entwickelt. Durch diese Methode kann die Genauigkeit der Ergebnisse von Titarchuk

& Lyubarskij (1995) bestimmt werden und außerdem die vollständige Winkel- und Ortsabhängigkeit der comptonisierten Strahlung angegeben werden. Wie von Titarchuk (1994) vermutet, stellt sich heraus, daß diese Strahlung im Fall einer optisch dünnen Scheibe sehr stark in Richtung der Oberfläche kollimiert ist.

Zunächst wird in Kapitel 2.1 der Compton–Streuquerschnitt angegeben, der in dem hier betrachteten Fall die Grundlage für den Streuterm (siehe Gl. 1.9) darstellt. Im Kapitel 2.2 wird das Integral–Eigenwertproblem definiert, das zur Bestimmung des Spektralindex α führt. Kapitel 2.3 stellt die Methode zur Lösung des Eigenwertproblems dar. Dabei wird die Phasenfunktion für $\Theta \ll 1$ und $\Theta \gg 1$ in Legendre–Polynome bezüglich des Streuwinkels der Photonen entwickelt. Die Intensität wird bezüglich der Winkelabhängigkeit ebenfalls in Legendre–Polynome, die vollständig sind auf dem Halbraum $0 \leq \mu \leq 1$ (wobei μ der Kosinus des Winkels zwischen Photonenrichtung und Scheibennormalen ist) entwickelt. Dadurch wird das Problem reduziert auf ein System gekoppelter Differentialgleichungen für die Ortskoordinate senkrecht zur Scheibenoberfläche. Diese wird schließlich auf eine algebraische Eigenwertgleichung reduziert, in dem die Ortsabhängigkeit in Tschebyscheff–Polynome entwickelt wird. Mit einer Zerlegung der dabei erhaltenen singulären Matrix können dann die Eigenfunktionen erhalten werden. Die Bedingung für die Existenz dieser Matrix liefert den Spektralindex α . Die Ergebnisse werden in Kapitel 2.5 dargestellt. Sie bestehen aus Darstellungen des Spektralindex α als Funktion der Plasmatemperatur Θ und optischen Tiefe τ_0 der Scheibe, sowie der Winkel- und Ortsabhängigkeit der spezifischen Intensität. Die Ergebnisse werden mit denen von Titarchuk & Lyubarskij (1995) verglichen.

2.1 Der Compton–Streuquerschnitt

Der einzige Streuprozess, der für den Transport im Orts- und Impulsraum der Photonen von Bedeutung ist, ist die Streuung an freien Elektronen. Die Energie der Photonen sei dabei kleiner als die Energie der thermischen Elektronen: $h\nu < k_B T_e$. Wir betrachten also Photonen, die sich im Spektralbereich unterhalb der Energie befinden, bei der das Spektrum durch ein Wiensches Gesetz „abgeschnitten“ ist. Der Energieübertrag von den Photonen auf die Elektronen durch Rückstoß kann dann in erster Näherung vernachlässigt werden. Im Ruhesystem der Elektronen (gekennzeichnet durch gestrichene Größen) ist diese Streuung daher elastisch. Da wir Photonen bei Energien beschreiben wollen, für die gleichzeitig die Bedingung $h\nu \ll m_e c^2$ erfüllt ist, geht die Klein–Nishina–Streuquerschnittfunktion in die klassische Thomson–Streuquerschnittfunktion über, welche im Elektronenruhesystem (gestrichene Größen) gegeben ist durch (siehe z.B. Pomraning 1973)

$$\sigma'_s(\nu' \rightarrow \nu'_1, \eta') = \frac{3}{16\pi} n'_e \sigma_T \{1 + (\eta')^2\} \delta(\nu' - \nu'_1), \quad (2.1)$$

dabei ist $\sigma_T = 6.65 \times 10^{-25} \text{cm}^2$ der Thomson–Streuquerschnitt und n_e die Elektronendichte. Der Kosinus des Streuwinkels ist durch η' gegeben. Im Laborsystem (Ruhe­system der Plasmascheibe) sind die Elektronen homogen und isotrop verteilt und werden durch eine entsprechende Maxwell–Verteilung beschrieben:

$$f(v) = \frac{\gamma^5 \exp(-\gamma/\Theta)}{4\pi \Theta K_2(1/\Theta)}, \quad (2.2)$$

wobei K_2 die modifizierte Besselfunktion der zweiten Art der Ordnung 2 ist, und $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$ (wir setzen hier und im folgenden $c = 1$). Die Normierung dieser Verteilung lautet

$$\int d^3v f(v) = 4\pi \int dv v^2 f(v) = 1. \quad (2.3)$$

Die Streufunktion im Laborsystem (ungestrichene Größen) kann nun erhalten werden durch eine Lorentz–Transformation der Funktion (2.1) mit der Geschwindigkeit $-v$, Multiplikation mit der Verteilungsfunktion $f(v)$ und Integration über alle möglichen Geschwindigkeiten v . Die Streufunktion ist dann gegeben durch²

$$\begin{aligned} \sigma_s(\nu \rightarrow \nu_1, \eta, \Theta) &= \frac{3}{16\pi} \frac{n_e \sigma_T}{\nu x} \int d^3v \frac{f(v)}{\gamma} \\ &\quad \cdot \left\{ 1 + \left(1 - \frac{1 - \eta}{\gamma^2 D D_1} \right)^2 \right\} \cdot \delta \left[\gamma \left(\frac{D}{x_1} - \frac{D_1}{x} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.4)$$

wobei folgende Definitionen eingeführt wurden

$$\begin{aligned} D &:= 1 - \tilde{\mu} v, \\ D_1 &:= 1 - \tilde{\mu}_1 v. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Hierbei bezeichnet $\tilde{\mu}$ und $\tilde{\mu}_1$ jeweils den Kosinus des Polarwinkels des Photons in bezug auf die Elektronenrichtung. Die δ –Funktion in Gl. (2.4) ist ein Ausdruck für die Dopplerverschiebung der Photonenfrequenz. Die Verschiebung dieser Frequenz bei einer Streuung ist gegeben durch $x_1 = x D/D_1$. Das bedeutet, daß der Energiegewinn der Photonen für eine Rückstreuung mit $\tilde{\mu} = -1$ (Elektron und Photon antiparallel) und $\tilde{\mu}_1 = 1$ am effektivsten ist.

2.2 Formulierung des Eigenwertproblems

Wir sind an der Situation interessiert, in der niederenergetische Strahlung (Ultraviolett) in einer Scheibe vorhanden ist, und diese durch Streuung an Elektronen

²Siehe auch Titarchuk & Lyubarskij (1995) Gl. (2) nach Korrektur eines Tippfehlers.

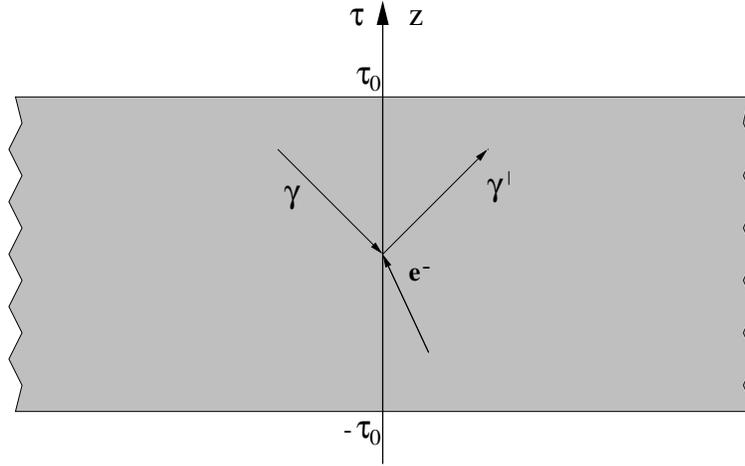


Abbildung 2.1: Definition der Koordinatenachse $\tau = n_e \sigma_T z$ parallel zur Scheibennormalen. Die Verteilung der Elektronen erstreckt sich von $\tau = -\tau_0$ bis $\tau = \tau_0$. Zur Definition der Koordinaten siehe auch Abb. 2.2.

ein Potenzgesetz bei hohen Energien (Röntgenbereich) formt, wie von Shapiro et al. (1976) und Sunyaev & Titarchuk (1980) gezeigt wurde und durch numerische Untersuchungen von Katz (1976) bestätigt wurde. Gleichung (1.9) stellt für diesen Fall die allgemeine Form der Transportgleichung dar.

Bevor wir die spezielle Transportgleichung für dieses Problem angeben, definieren wir dessen Geometrie. Wir betrachten eine unendlich ausgedehnte Scheibe der Dicke $2z_0$, die ein nicht-entartetes Gas freier Elektronen der Temperatur T_e bei einer Dichte n_e enthält. Der einzige Prozeß, der für den Transport der Photonen im Orts- und Impulsraum³ von Bedeutung ist, ist die Compton-Streuung. Die optische Halbdicke der Scheibe ist definiert durch $\tau_0 = \sigma_T n_e z_0$. Die räumliche Koordinate senkrecht zur Scheibe sei z , mit $z = 0$ in der Mittelebene. Weiterhin definieren wir eine Variable der optischen Tiefe gemäß $\tau = n_e \sigma_T z$, die begrenzt ist durch $-\tau_0 \leq \tau \leq \tau_0$ (siehe Abb. 2.1). Der Kosinus des Winkels zwischen der Scheibennormalen und der Photonenrichtung sei μ bzw. μ_1 , wobei der Index die Winkel vor und nach einem Streueignis unterscheidet. Wir bezeichnen mit η den Kosinus des Winkels zwischen diesen Richtungen (siehe Abb. 2.2). Für eine isotrope Elektronenverteilung hängt die Phasenfunktion, welche die Änderung der Photonenrichtung bei einer Streuung beschreibt, nur von η ab. Um diese Phasenfunktion zu berechnen, müssen wir ein Integral über alle möglichen Elektronenrichtungen ausführen. Wegen der Isotropie der Elektronen spielt die durch die Scheibennormale ausgezeichnete Richtung bei dieser Integration keine Rolle. Daher ist es vorteilhaft, in ein Koordinatensystem zu transformieren, in dem die Elektronenrichtung die z -Achse definiert. Der Kosinus des Winkels zwischen der

³Bzw. Frequenzraum, siehe Gl. (1.7).

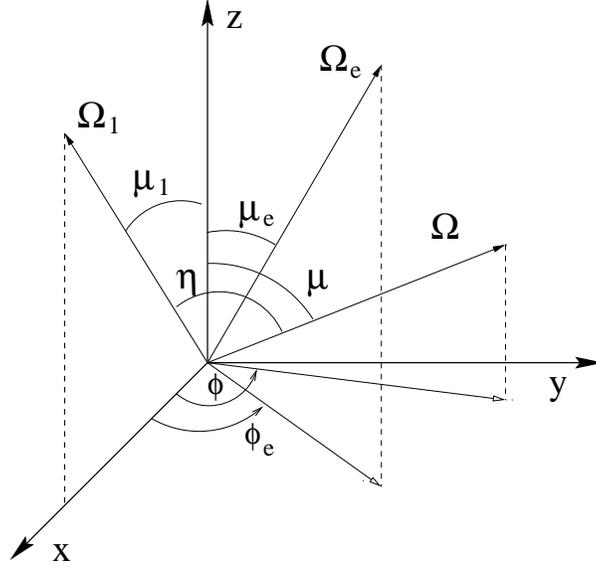


Abbildung 2.2: Koordinatensystem mit den Richtungen des Elektrons (Ω_e, μ_e, ϕ_e), des auslaufenden Photons (Ω, μ, ϕ), und des einlaufenden Photons ($\Omega_1, \mu_1, \phi_1 = 0$). Die Bezeichnungen sind jeweils der Raumwinkel, der Polarwinkel-Kosinus und der Azimut. Die Richtung der z -Achse ist senkrecht zur Ebene der Plasma-Scheibe.

Photonen- und Elektronenrichtung ist dann $\tilde{\mu}$ bzw. $\tilde{\mu}_1$. Eine analoge Definition wird für die azimutalen Winkel benutzt.

Im Energiebereich, den wir hier betrachten wollen, wird keine Strahlung in die Scheibe injiziert oder durch Quellen erzeugt. Diese ist allein durch Streuung von niederenergetischen Photonen erzeugt worden. Weiterhin brauchen wir keine Photonabsorption zu berücksichtigen, so daß wir den Quellterm \mathcal{Q} vernachlässigen können. Da wir an einem stationären Spektrum interessiert sind, bei dem die Intensität nicht von der Zeit abhängt, wird die Boltzmann-Gleichung für Photonentransport (Gl. 1.9) zu:

$$\mu \frac{\partial}{\partial \tau} I(\nu, \mu, \tau) = \frac{1}{n_e \sigma_T} \int_0^\infty d\nu_1 \int_{4\pi} d\Omega_1 \cdot \left[\frac{\nu}{\nu_1} \sigma_s(\nu_1 \rightarrow \nu, \eta, \Theta) I(\nu_1, \mu_1, \tau) - \sigma_s(\nu \rightarrow \nu_1, \eta, \Theta) I(\nu, \mu, \tau) \right], \quad (2.6)$$

(vgl. Pomraning 1973). Dabei wurde berücksichtigt, daß wegen der Symmetrie der hier betrachteten Scheibengeometrie die spezifische Intensität nicht vom Azimut ϕ abhängig sein kann. Die Streufunktion ist dabei durch Gl. (2.4) gegeben. Wir stellen fest, daß der Integraloperator $L(x_1, x)$ der Gl. (2.6) (unter Berücksichtigung der Streufunktion 2.4) selbstähnlich ist: $L(x_1, x) = L(x_1, x)$ für

$u \neq 0$. Daraus folgt, daß dieser ein Potenzgesetz als Eigenfunktion haben muß (vgl. Titarchuk & Lyubarskij 1995):

$$L(x_1, x) x_1^\alpha = L\left(\frac{x_1}{x}, 1\right) \left(\frac{x_1}{x}\right)^\alpha x^\alpha = L(t, 1) t^\alpha x^\alpha = \lambda x^\alpha, \quad (2.7)$$

wobei im vorletzten Schritt die Integrationsvariable $t \equiv x_1/x$ eingeführt wurde. Wir machen daher einen Potenzgesetz-Ansatz für die Frequenzabhängigkeit der spezifischen Intensität:

$$I(\nu, \mu, \tau) = J(\mu, \tau) x^{-\alpha}. \quad (2.8)$$

Setzen wir dies und Gl. (2.4) in Gl. (2.6) ein und führen wir das Integral über die δ -Funktion aus, so erhalten wir

$$\mu \frac{\partial J(\mu, \tau)}{\partial \tau} = -J(\mu, \tau) + B(\mu, \tau), \quad (2.9)$$

wobei die Quellfunktion⁴ $B(\mu, \tau)$ wie folgt definiert ist

$$B(\mu, \tau) = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 d\mu_1 \int_0^{2\pi} d\phi R(\eta) J(\mu_1, \tau). \quad (2.10)$$

Die Phasenfunktion $R(\eta)$ ist dabei gegeben durch

$$R(\eta) = \frac{3}{4} \int d^3v \frac{f(v)}{\gamma^2} \left(\frac{D_1}{D}\right)^{\alpha+2} \frac{1}{D_1} \{1 + (\eta')^2\}. \quad (2.11)$$

Die letzten drei Gleichungen (2.9, 2.10 und 2.11) definieren zusammen mit der Randbedingung

$$J(\mu < 0, \tau = \tau_0) \equiv 0 \equiv J(\mu > 0, \tau = -\tau_0) \quad (2.12)$$

ein Integral-Eigenwertproblem. Unser Ziel ist es, dieses auf ein algebraisches Eigenwertproblem durch Entwicklung der spezifischen Intensität in Legendre- und Tschebyscheff-Polynome zu reduzieren. Dies ist in den folgenden Abschnitten dargestellt.

2.3 Die semi-analytische Lösungsmethode

Zunächst soll die Methode zur Umwandlung des oben definierten Eigenwertproblems in eine algebraische Eigenwertgleichung zusammenfassend beschrieben werden. Die Details dieser Reduktion sind in Kap. 2.4 dargestellt.

⁴Diese ist nicht zu verwechseln mit einer unabhängigen Quelle \mathcal{Q} von Photonen (siehe Kapitel 1.1.1).

Wir entwickeln die Phasenfunktion in eine Serie von Legendre–Polynomen:

$$R(\eta) = \sum_{i=0}^M \omega_i(\alpha, \Theta) P_i(\eta). \quad (2.13)$$

Die Koeffizienten $\omega_i(\alpha, \Theta)$ können im Falle kleiner Elektronentemperatur ($\Theta \ll 1$) als Polynome in α ausgedrückt werden, wobei die Koeffizienten dieser Polynome Momente der Maxwell–Verteilung enthalten, welche sehr leicht numerisch berechnet werden können. Im Falle hoher Elektronentemperatur ($\Theta \gg 1$) hängen die Koeffizienten $\omega_i(\alpha, \Theta)$ von der unvollständigen Γ –Funktion ab.

Der entscheidende Schritt ist nun, die spezifische Intensität $J(\mu, \tau)$ auch in Legendre–Polynome bezüglich μ zu entwickeln. Für den Halbraum $0 \leq \mu \leq 1$ schreiben wir (vgl. Gl. 2.46)

$$J(\mu, \tau) \Big|_{\mu \geq 0} = \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} P_n(2\mu-1) Q_n^+(\tau). \quad (2.14)$$

Nun entwickeln wir die $N+1$ Koeffizienten $Q_n^+(\tau)$ in eine Reihe von Tschebyscheff–Polynomen. In Vektorform schreiben wir (vgl. Gl. 2.68)

$$\mathbf{Q}^+(\tau/\tau_0) = \mathbf{q}_0 + \sum_{i=1}^K [1 - T_i(-\tau/\tau_0)] \mathbf{q}_i. \quad (2.15)$$

Alle Entwicklungskoeffizienten werden durch einen gemeinsamen $(K+1) \cdot (N+1)$ –dimensionalen Vektor repräsentiert:

$$\underline{\mathbf{q}} := \begin{pmatrix} \mathbf{q}_0 \\ \mathbf{q}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_K \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

In Kap. 2.4 wird gezeigt, daß dadurch das Eigenwertproblem (Gln. 2.9–2.11) zu einem homogenen linearen Gleichungssystem für die Elemente des Vektors $\underline{\mathbf{q}}$ wird. Dies kann dann numerisch sehr leicht gelöst werden. Dieser Satz von Gleichungen lautet in Matrixschreibweise (siehe Gl. 2.80):

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}}(\alpha, \Theta, \tau_0) \underline{\mathbf{q}} = 0. \quad (2.17)$$

Zunächst muß für vorgegebene Werte von τ_0 und Θ die Matrix $\underline{\underline{\mathbf{F}}}(\alpha, \Theta, \tau_0)$ berechnet werden. Der zugehörige Spektralindex α wird dann durch die Forderung bestimmt, daß die Determinante der entsprechenden Matrix verschwindet:

$$\det[\underline{\underline{\mathbf{F}}}(\alpha)] \stackrel{!}{=} 0. \quad (2.18)$$

Mit Hilfe der Routine `FindRoot` aus *Mathematica* (Wolfram 1991) ist es leicht möglich die Lösungen zu finden. Aus dem Spektrum der möglichen Lösungen kann auf folgende Weise die an dieser Stelle relevante Lösung gefunden werden. Zunächst entsprechen die negativen Lösungen dem Spektrum der in der Energie reduzierten Photonen (Pozdnyakov et al. 1983), d.h. dem zur Comptonisierung inversen Prozeß. Wir suchen daher hier zunächst nach Lösungen mit $\alpha > 0$. Außerdem muß die zu der jeweiligen Lösung α gehörende Intensität $J(\mu, \tau)$ auf dem gesamten Wertebereich positiv sein. Dadurch ergibt sich, daß jeweils das kleinste positive α , welches Lösung von Gl. (2.18) ist, der gesuchte Spektralindex ist. Zum Zeitaufwand sei bemerkt, daß die Lösung der nichtlinearen Gleichung (2.18) den Hauptanteil an den numerischen Berechnungen benötigt. Für eine Entwicklung der Orts- und Winkelabhängigkeit von $J(\mu, \tau)$ bis zur (z.B.) 9. Ordnung, ist $\underline{\mathbf{q}}$ ein 100-dimensionaler Vektor und $\underline{\mathbf{F}}(\alpha)$ ist eine 100×100 Matrix. Eine Lösung von Gl. (2.18) bei dieser Dimension benötigt sowohl im relativistischen wie auch im nicht-relativistischen Fall weniger als eine Minute auf einem 150 MHz *Pentium* PC.

Für jeden Wert von α , welcher die Gl. (2.18) löst, können die Entwicklungskoeffizienten $\underline{\mathbf{q}}$ und damit $J(\mu, \tau)$ durch Lösung der folgenden Gleichung gefunden werden:

$$\underline{\mathbf{F}} \underline{\mathbf{q}} = 0, \quad (2.19)$$

wobei $\underline{\mathbf{F}}$ nun eine bekannte singuläre Matrix ist. Die Lösung dieser Gleichung kann mit Hilfe einer ‘singular value decomposition’ (siehe z.B. Press et al. 1992) gefunden werden. Dadurch ist es möglich, die quadratische Matrix $\underline{\mathbf{F}}$ in eine diagonale Matrix $\underline{\mathbf{F}}_{\mathbf{D}}$ und zwei orthogonale Matrizen $\underline{\mathbf{U}}$ und $\underline{\mathbf{V}}$ auf folgende Weise zu zerlegen:

$$\underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{U}} \underline{\mathbf{F}}_{\mathbf{D}} \underline{\mathbf{V}}^{\mathbf{T}}, \quad (2.20)$$

wobei gilt

$$\underline{\mathbf{U}} \underline{\mathbf{U}}^{\mathbf{T}} = 1 = \underline{\mathbf{V}} \underline{\mathbf{V}}^{\mathbf{T}}. \quad (2.21)$$

Sei nun das i -te Element der Diagonalmatrix $\underline{\mathbf{F}}_{\mathbf{D}}$ gleich Null und $\hat{\mathbf{e}}_i$ der entsprechende Einheitsvektor, so folgt aus Gl. (2.20) dann

$$\underline{\mathbf{F}} \underline{\mathbf{V}} \hat{\mathbf{e}}_i = \underline{\mathbf{U}} \underline{\mathbf{F}}_{\mathbf{D}} \hat{\mathbf{e}}_i = 0. \quad (2.22)$$

Das bedeutet, daß die i -te Spalte von $\underline{\mathbf{V}}$ einen Lösungsvektor $\underline{\mathbf{q}}$ der Gl. (2.19) darstellt. Innerhalb von *Mathematica* liefert die Routine `SingularValues` die Zerlegung von $\underline{\mathbf{F}}$ und somit deren vollständigen Nullraum. Der Lösungsvektor $\underline{\mathbf{q}}$ ergibt eingesetzt in Gl. (2.15) die Koeffizienten $\mathbf{Q}^+(\tau/\tau_0)$. Diese liefern dann gemäß Gl. (2.14) die Intensität $J(\mu, \tau)$.

2.4 Reduktion der Boltzmann–Gleichung zu einem algebraischen Eigenwertproblem

Um die Boltzmann–Gleichung in ein algebraisches Eigenwertproblem zu überführen, entwickeln wir die Phasenfunktion $R(\eta)$ und die spezifische Intensität $J(\mu, \tau)$ in Legendre– und Tschebyscheff–Polynome.

Zunächst entwickeln wir die Phasenfunktion:

$$R(\eta) = \sum_{i=0}^M \omega_i(\alpha, \Theta) P_i(\eta). \quad (2.23)$$

Die Normierung der Legendre–Polynome, die die Winkelabhängigkeit von $R(\eta)$ beschreiben, lautet

$$\int_{-1}^1 P_i(\mu) P_j(\mu) d\mu = \frac{2}{2i+1} \delta_{ij}. \quad (2.24)$$

Diese Polynome erfüllen ein Additionstheorem (siehe z.B. Landau & Lifschitz 1988, Gl. (c.10)):

$$P_l(\eta) = P_l(\mu) P_l(\mu_1) + \sum_{m=1}^l 2 \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\mu) P_l^m(\mu_1) \cos(m(\phi - \phi_1)), \quad (2.25)$$

wobei $\phi, \mu \equiv \cos \theta$ und $\phi_1, \mu_1 \equiv \cos \theta_1$ zwei Richtungen definieren, und $\gamma \equiv \arccos \eta$ der Winkel zwischen diesen Richtungen ist. Nach Integration über den Azimut kann dann Gl. (2.23) geschrieben werden als Produkt zweier Legendre–Polynome, die jeweils vom Kosinus des Photonenwinkels mit der z -Achse abhängig ist:

$$\frac{1}{2\pi} \int R(\eta) d\phi = \sum_{i=0}^M \omega_i(\alpha, \Theta) P_i(\mu) P_i(\mu_1) =: K(\mu, \mu_1). \quad (2.26)$$

Um die Koeffizienten $\omega_i(\alpha, \Theta)$ für eine gegebene Temperatur Θ zu berechnen, müssen wir das Integral über die Elektronengeschwindigkeit v ausführen. Dies ist möglich im Grenzfall hoher oder niedriger Plasmatemperatur. In diesen Fällen kann der Integrand der Phasenfunktion in eine Taylorreihe entwickelt werden. Dies ist in Kap. 2.4.1 für den nicht relativistischen Fall, und in Kap. 2.4.2 für den relativistischen Fall gezeigt.

Die Entwicklung der Orts– und Winkelabhängigkeit von $J(\mu, \tau)$ in Legendre– und Tschebyscheff–Polynome ist in Kap. 2.4.3 und 2.4.4 dargestellt.

2.4.1 Entwicklung der Phasenfunktion für $\Theta \ll 1$

Für kleine Plasmatemperaturen ist die Verteilungsfunktion $f(v)$ stark zugespitzt bei $v \ll 1$. Der Hauptbeitrag zum Integral über die Elektronengeschwindigkeit kommt dann von der Region kleiner Geschwindigkeiten. Daher kann man den Integranden (präziser: den Faktor von $f(v)$ des Integranden) in eine Taylorreihe um $v = 0$ mit Koeffizienten a_i entwickeln:

$$\begin{aligned}
R(\eta) &= \frac{3}{4} \int d^3v f(v) \frac{1}{\gamma^2} \frac{(1 - \tilde{\mu}_1 v)^{\alpha+1}}{(1 - \tilde{\mu} v)^{\alpha+2}} \\
&\quad \cdot \left\{ 1 + \left(1 - \frac{1 - \eta}{\gamma^2 (1 - \tilde{\mu} v) (1 - \tilde{\mu}_1 v)} \right)^2 \right\} \\
&= \int v^2 dv d\tilde{\mu}_1 d\tilde{\phi}_e f(v) \sum_{i=0}^L a_i(\alpha, \tilde{\mu}(\eta, \tilde{\mu}_1, \tilde{\phi}_e), \tilde{\mu}_1, \eta) v^i \\
&= \sum_{i=0}^M \omega_i(\alpha, \Theta) P_i(\eta). \tag{2.27}
\end{aligned}$$

Wir wählen die z -Achse als Richtung des einlaufenden Photons. Der Kosinus des Polarwinkels der Elektronenrichtung ist dann $\tilde{\mu}_1$ und der Azimut der Elektronenrichtung ist $\tilde{\phi}_e$. Wir wählen dabei die Orientierung des Koordinatensystems so, daß der Azimut des auslaufenden Photons verschwindet. Der Kosinus des Winkels zwischen auslaufendem Photon und Elektron ist $\tilde{\mu}$. Gleichung (2.25) ergibt dann für $l = 1$ die Beziehung

$$\tilde{\mu}(\eta, \tilde{\mu}_1, \tilde{\phi}_e) = \eta \tilde{\mu}_1 + \sqrt{1 - \eta^2} \sqrt{1 - \tilde{\mu}_1^2} \cos \tilde{\phi}_e. \tag{2.28}$$

Durch diese Wahl des Koordinatensystems wird die Integration über die Elektronenrichtung ($d\tilde{\mu}_1 d\tilde{\phi}_e$) elementar. Die verbleibende Integration über die Elektronengeschwindigkeit kann durch Momente der Verteilungsfunktion $f(v)$ ausgedrückt werden, welche sehr einfach numerisch zu berechnen sind:

$$\langle v^k \rangle := 4\pi \int_0^1 f(v) v^{k+2} dv. \tag{2.29}$$

Die Normierung von $f(v)$ gibt $\langle v^0 \rangle = 1$. Für nicht-relativistische Plasmatemperaturen ist das mittlere Geschwindigkeitsquadrat gegeben durch $\langle v^2 \rangle = 3\Theta$. Die notwendige Ordnung der Entwicklung hängt nicht nur von der gewählten Plasmatemperatur ab, sondern auch von dem (zunächst unbestimmten) Spektralindex α . Für eine ausreichende Konvergenz der Entwicklung in allen weiter unten diskutierten Fällen ist eine Entwicklung des Faktors von $f(v)$ im Integranden von $R(\eta)$ bis zur 16. Ordnung in v notwendig. Da selbst das Endergebnis von Gl. (2.27) in dieser Ordnung 686 Terme in vollständig ausmultiplizierter Form bezüglich η

und α besitzt, bietet sich eine Berechnung mit Hilfe von *Mathematica* (siehe z.B. Wolfram 1991) an.⁵ Numerisch zu berechnen sind dann die Momente $\langle v^k \rangle$ für die Ordnungen $k = 0, 2, 4, \dots, 16$. Die ungeraden Momente verschwinden durch die Winkelintegration. Durch Umordnen der Terme erreicht man die gewünschte Darstellung von $R(\eta)$ als Entwicklung in Legendre-Polynome. Die maximale Ordnung in η ist gegeben durch $M = L/2 + 2$. Man hat natürlich die Möglichkeit die Reihe bei $M \leq L/2 + 2$ abzuschneiden, ohne die Entwicklung bezüglich v zu beeinflussen. Da die Entwicklung, wie oben erwähnt, für $L = 16$ sehr viele Terme enthält, sei hier nur das Ergebnis für eine Entwicklung bis $L = 6$ angegeben. Die Koeffizienten lauten dann:

$$\begin{aligned}
\omega_0(\alpha, \Theta) &= 1 + \frac{\langle v^2 \rangle}{3} (\alpha^2 + 3\alpha) + \frac{\langle v^4 \rangle}{150} (\alpha^2 + 3\alpha)(7\alpha^2 + 21\alpha + 22) \\
&\quad + \frac{\langle v^6 \rangle}{3150} (\alpha^2 + 3\alpha)(11\alpha^4 + 66\alpha^3 + 239\alpha^2 + 420\alpha + 314), \\
\omega_1(\alpha, \Theta) &= -\frac{2}{5} \langle v^2 \rangle (\alpha^2 + 3\alpha + 1) - \frac{\langle v^4 \rangle}{25} (2\alpha^4 + 12\alpha^3 + 21\alpha^2 + 9\alpha + 6) \\
&\quad - \frac{\langle v^6 \rangle}{2450} (17\alpha^6 + 153\alpha^5 + 615\alpha^4 + 1395\alpha^3 + 1664\alpha^2 + 780\alpha + 276), \\
\omega_2(\alpha, \Theta) &= \frac{1}{2} + \frac{\langle v^2 \rangle}{6} (\alpha^2 + 3\alpha - 6) + \frac{\langle v^4 \rangle}{210} (10\alpha^4 + 60\alpha^3 + 55\alpha^2 - 105\alpha + 78) \\
&\quad + \frac{\langle v^6 \rangle}{4410} (23\alpha^6 + 207\alpha^5 + 665\alpha^4 + 885\alpha^3 + 371\alpha^2 - 75\alpha + 486), \\
\omega_3(\alpha, \Theta) &= -\frac{\langle v^2 \rangle}{10} (\alpha - 1)(\alpha + 4) - \frac{\langle v^4 \rangle}{50} (\alpha - 1)(\alpha + 4)(\alpha^2 + 3\alpha - 7) \\
&\quad - \frac{\langle v^6 \rangle}{9450} (\alpha - 1)(\alpha + 4)(23\alpha^4 + 138\alpha^3 + 103\alpha^2 - 312\alpha + 9), \\
\omega_4(\alpha, \Theta) &= \frac{\langle v^4 \rangle}{175} (\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha + 4)(\alpha + 5) \\
&\quad + \frac{\langle v^6 \rangle}{1225} (\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha + 4)(\alpha + 5)(\alpha^2 + 3\alpha - 6), \\
\omega_5(\alpha, \Theta) &= -\frac{\langle v^6 \rangle}{6615} (\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha - 3)(\alpha + 4)(\alpha + 5)(\alpha + 6). \tag{2.30}
\end{aligned}$$

⁵Um die Fähigkeiten von *Mathematica* auf einem *Pentium* PC nicht um ein vielfaches zu überfordern, ist es allerdings notwendig, die Entwicklung und Integration in Schritten auszuführen. Zum einen ist es nötig, den Integranden in multiplikative Terme zu zerlegen, die zunächst einzeln bis zur gewünschten Ordnung entwickelt werden, um die Komplexität des Zwischenergebnisses niedrig zu halten. Weiterhin kann man ausnutzen, daß die Integration $\int \tilde{\mu}(\eta, \tilde{\mu}_1, \tilde{\phi}_e)^k d\tilde{\phi}_e$ für jedes k nur einmal ausgeführt werden braucht, wenn das Ergebnis dann in der Entwicklung substituiert wird.

In dem Fall sehr kleiner Elektronentemperatur *und* ausreichend kleinem Spektralindex ($\Theta \ll 1$ **und** $\alpha \ll 1$) konvergiert die Reihe bezüglich v (Gl. 2.27) sehr schnell. Wenn wir die Entwicklung bei (z.B.) $L = 2$ abschneiden können, so lautet der isotrope Anteil der Gl. (2.26)

$$\omega_0(\alpha, \Theta) = 1 + \Theta(\alpha^2 + 3\alpha), \quad (2.31)$$

in Übereinstimmung mit Gl. (18) aus Titarchuk & Lyubarskij (1995)⁶.

2.4.2 Entwicklung der Phasenfunktion für $\Theta \gg 1$

Im relativistischen Grenzfall wählen wir einen etwas anderen Weg zur Entwicklung der Phasenfunktion.⁷ Wir haben den Integranden an der Stelle $v = 1$ zu entwickeln, an der dieser singularär ist. Unter Ausnutzung der Orthogonalität der Legendre–Polynome kann Gl. (2.23) invertiert werden:

$$\omega_i(\alpha, \Theta) = \frac{2i+1}{4\pi} \int R(\eta) P_i(\eta) d\tilde{\Omega}, \quad (2.32)$$

wobei $d\tilde{\Omega} = d\eta d\tilde{\phi}$, mit dem Azimut $\tilde{\phi}$ des auslaufenden Photons relativ zum einlaufenden, welches die z -Achse definiert. In diesem Bezugssystem ist das dreidimensionale Geschwindigkeitselement der Elektronen gegeben durch $d^3v = v^2 dv d\tilde{\Omega}_e$. Unter Ausnutzung der Definition der Phasenfunktion kann man dann die Entwicklungskoeffizienten schreiben als

$$\omega_i(\alpha, \Theta) = 3\pi \int_0^1 dv v^2 \frac{f(v)}{\gamma^2} \hat{\omega}_i(\alpha, \gamma), \quad (2.33)$$

mit dem von der Temperatur unabhängigen Kern

$$\hat{\omega}_i(\alpha, \gamma) = \frac{2i+1}{(4\pi)^2} \int \left(\frac{D_1}{D}\right)^{\alpha+2} \frac{1}{D_1} \{1 + (\eta')^2\} P_i(\eta) d\tilde{\Omega} d\tilde{\Omega}_e. \quad (2.34)$$

Man kann nun zu einer anderen Integrationsachse übergehen, so daß in diesem Koordinatensystem die Elektronenrichtung die z -Achse wird. Dies wird ausgedrückt durch $d\tilde{\Omega} d\tilde{\Omega}_e = d\tilde{\Omega} d\tilde{\Omega}_1$. Mit dieser Wahl des Koordinatensystems ist es sehr leicht, eine Lorentz–Transformation in das Elektronenruhesystem durchzuführen (Größen in diesem System seien durch Striche gekennzeichnet). Der Azimut des

⁶Gleichung (A16) sollte lauten: $\hat{C}_0 = \frac{4}{3\gamma^2} \left\{ 1 + \frac{v^2}{3} [\alpha(\alpha+3) + 6] \right\}$.

⁷Die im nachfolgenden beschriebene Vorgehensweise ist natürlich auch auf den Fall $\Theta \ll 1$ (Kap. 2.4.1) übertragbar.

ein- sowie auslaufenden Photons ändert sich nicht, während der Winkel zwischen Photon- und Transformationsrichtung bestimmt wird durch die Gleichung

$$\tilde{\mu} = \frac{\tilde{\mu}' + v}{1 + v\tilde{\mu}'}. \quad (2.35)$$

Der differentielle Raumwinkel transformiert gemäß

$$d\tilde{\Omega} = \frac{d\tilde{\Omega}'}{\gamma^2(1 + v\tilde{\mu}')^2}. \quad (2.36)$$

Diese Transformationen führen zu

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_i(\alpha, \gamma) &= \frac{2i+1}{(4\pi)^2\gamma^2} \int d\tilde{\mu}' d\tilde{\mu}'_1 d\tilde{\phi}' d\tilde{\phi}'_1 \\ &\cdot \frac{(1 + v\tilde{\mu}')^\alpha}{(1 + v\tilde{\mu}'_1)^{\alpha+3}} \{1 + (\eta')^2\} P_i(\eta), \end{aligned} \quad (2.37)$$

wobei das Argument des Legendre-Polynoms noch ersetzt werden muß durch

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma^2} \frac{1 - \eta'}{(1 + v\tilde{\mu}')(1 + v\tilde{\mu}'_1)}. \quad (2.38)$$

Diese Integrale sind von elementarer Natur und auch in Integraltafeln nachzuschlagen. Mit Hilfe von *Mathematica* kann man sehr schnell die Lösungen finden. Die vollständigen Lösungen für $i = 0, 1, 2, 3$ sind im Anhang B dargestellt. (siehe auch Titarchuk & Lyubarskij 1995, Gln. A10–A15, für $i = 0$). Im Grenzfall $v \rightarrow 1$ divergieren diese Lösungen. Daher bestimmen wir die führende Ordnung dieser Divergenz in γ . Separieren wir noch einen γ -abhängigen Faktor gemäß

$$\hat{\omega}_i(\alpha, \gamma) = (2\gamma)^{2\alpha+2} \hat{\omega}_i(\alpha), \quad (2.39)$$

so erhalten wir für Gl. (2.37) in führender Ordnung jeweils

$$\hat{\omega}_0(\alpha) = \frac{\alpha(\alpha+3)+4}{(\alpha+1)(\alpha+2)^2(\alpha+3)}, \quad (2.40)$$

$$\hat{\omega}_1(\alpha) = -3 \frac{\alpha(\alpha+3)+4}{(\alpha+2)^2(\alpha+3)^2},$$

$$\hat{\omega}_2(\alpha) = 5\alpha \frac{\alpha(\alpha+3)+4}{(\alpha+2)^2(\alpha+3)^2(\alpha+4)},$$

$$\hat{\omega}_3(\alpha) = 7\alpha(1-\alpha) \frac{\alpha(\alpha+3)+4}{(\alpha+2)^2(\alpha+3)^2(\alpha+4)(\alpha+5)}.$$

Der isotrope Anteil $\hat{\omega}_0(\alpha, \gamma)$ ist wiederum in Übereinstimmung mit Titarchuk & Lyubarskij (1995), Gl. (A17).

Wir können den gesamten Integranden von Gl. (2.33) in eine Reihe um $v = 1$ entwickeln. Unter Benutzung der Relation

$$v^2 dv = \frac{1}{\gamma^3} \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} d\gamma = \frac{1}{\gamma^3} \left(1 - \frac{1}{2\gamma^2} + \dots\right) d\gamma \quad (2.41)$$

wird Gl. (2.33) im Grenzfall $1/\gamma \rightarrow 0$ zu:

$$\omega_i(\alpha, \Theta) = \frac{3}{4} \frac{1}{\Theta K_2(1/\Theta)} \hat{\omega}_i(\alpha) \int_1^\infty d\gamma \left(1 - \frac{1}{2\gamma^2}\right) (2\gamma)^{2\alpha+2} \exp\left(-\frac{\gamma}{\Theta}\right). \quad (2.42)$$

Dieses Integral kann man durch die unvollständige Γ -Funktion⁸ ausdrücken. Damit schreiben sich die Koeffizienten $\omega_i(\alpha, \Theta)$:

$$\omega_i(\alpha, \Theta) = 3 \frac{(2\Theta)^{2\alpha}}{K_2(1/\Theta)} \hat{\omega}_i(\alpha) \left[\Theta^2 \Gamma\left(2\alpha + 3, \frac{1}{\Theta}\right) - \frac{1}{2} \Gamma\left(2\alpha + 1, \frac{1}{\Theta}\right) \right]. \quad (2.43)$$

Zusammen mit den Gln. (2.40) definiert dieser Ausdruck die Entwicklungskoeffizienten (für $i = 0, 1, 2, 3$) der Phasenfunktion für hohe Plasmatemperaturen. (Vergleiche für $i = 0$ mit Titarchuk & Lyubarskij 1995 Gl. [19]⁹.)

2.4.3 Die Winkelabhängigkeit von $J(\mu, \tau)$

Die Winkelabhängigkeit der Intensität $J(\mu, \tau)$ kann in Form von Legendre-Polynomen mit τ -abhängigen Koeffizienten ausgedrückt werden. Durch die Symmetrie der Randbedingungen ist $J(\mu, \tau)$ durch den Halbraum $0 \leq \mu \leq 1$ und $-\tau_0 \leq \tau \leq \tau_0$ eindeutig bestimmt. Die Intensität in dem anderen Halbraum ist dann gegeben durch

$$J(-\mu, \tau) = J(\mu, -\tau). \quad (2.44)$$

Unter Berücksichtigung der Orthogonalitätsrelation der Legendre-Polynome auf dem Intervall (z.B.) $0 \leq \mu \leq 1$

$$\int_0^1 P_n(2\mu - 1) P_k(2\mu - 1) d\mu = \frac{1}{2n + 1} \delta_{nk}, \quad (2.45)$$

entwickeln wir die Intensität wie folgt

$$\begin{aligned} J(\mu, \tau) \Big|_{\mu \leq 0} &= \sum_{n=0}^N \frac{2n + 1}{2} P_n(2\mu + 1) Q_n^-(\tau), \\ J(\mu, \tau) \Big|_{\mu \geq 0} &= \sum_{n=0}^N \frac{2n + 1}{2} P_n(2\mu - 1) Q_n^+(\tau). \end{aligned} \quad (2.46)$$

⁸ $\Gamma(z, a) := \int_a^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$

⁹Für $\Theta \gg 1$ kann der zweite Term in der Klammer von Gl. (2.43) vernachlässigt werden. Außerdem gilt $\Gamma(2\alpha + 3, 1/\Theta) \simeq \Gamma(2\alpha + 3) = 2(\alpha + 1)\Gamma(2\alpha + 2)$. Weiterhin: $2\Theta^2/K_2(1/\Theta) \simeq 1$.

Wir definieren nun die Variablen ξ und ζ gemäß

$$\begin{aligned}\zeta &:= 2\mu + 1|_{\mu < 0}, \\ \xi &:= 2\mu - 1|_{\mu > 0}.\end{aligned}\tag{2.47}$$

Die Umkehrung der Gln. (2.46) kann man schreiben als

$$\begin{aligned}Q_n^-(\tau) &= \int_{-1}^1 J\left(\frac{\zeta - 1}{2}, \tau\right) P_n(\zeta) d\zeta, \\ Q_n^+(\tau) &= \int_{-1}^1 J\left(\frac{\xi + 1}{2}, \tau\right) P_n(\xi) d\xi.\end{aligned}\tag{2.48}$$

Wegen $P_n(\mu) = (-1)^n P_n(-\mu)$ wird die Symmetriebedingung (Gl. 2.44) zu

$$Q_n^-(\tau) = (-1)^n Q_n^+(-\tau).\tag{2.49}$$

Es ist nützlich, den Kern $K(\mu, \mu_1)$ (Gl. 2.26) zu transformieren und ihn in zwei Teile für $\mu_1 < 0$ und $\mu_1 \geq 0$ aufzuspalten. Zunächst kann man den Kern auf folgende Weise schreiben

$$K(\mu, \mu_1) = \mathbf{P}(\mu) \omega(\alpha, \Theta) \mathbf{P}(\mu_1),\tag{2.50}$$

wobei $\omega(\alpha, \Theta)$ eine $M + 1$ -dimensionale Matrix mit Diagonalelementen $\omega_i(\alpha, \Theta)$ ist, und $\mathbf{P}(\mu)$ ist ein Vektor derselben Dimension. Sei nun \mathbf{W} eine Matrix, die die Legendre-Polynome wie folgt transformiert¹⁰

$$\mathbf{P}(2\mu_1 - 1) = \mathbf{W} \mathbf{P}(\mu_1).\tag{2.51}$$

Für $\mu_1 \geq 0$ kann man nun schreiben

$$\begin{aligned}\omega(\alpha, \Theta) \mathbf{P}(\mu_1) &= \omega(\alpha, \Theta) \mathbf{W}^{-1} \mathbf{W} \mathbf{P}(\mu_1) \\ &=: \omega^+(\alpha, \Theta) \mathbf{P}(2\mu_1 - 1),\end{aligned}\tag{2.52}$$

mit einer $M + 1$ -dimensionalen *nicht*-diagonalen Matrix $\omega^+(\alpha, \Theta)$. Eine analoge Transformation für den Bereich $\mu_1 < 0$ führt auf

$$\begin{aligned}K(\mu, \mu_1) &= \mathbf{P}(\mu) \left[\omega^+(\alpha, \Theta) \mathbf{P}(2\mu_1 - 1) H(\mu_1) \right. \\ &\quad \left. + \omega^-(\alpha, \Theta) \mathbf{P}(2\mu_1 + 1) H(-\mu_1) \right],\end{aligned}\tag{2.53}$$

mit der Heaviside-Funktion:

$$H(\mu_1) = \begin{cases} 1 & : \mu_1 \geq 0 \\ 0 & : \mu_1 < 0 \end{cases}.\tag{2.54}$$

¹⁰Die Matrix \mathbf{W} erhält man aus Gleichung (2.51), indem man die Vektoren $\mathbf{P}(\mu_1)$ und $\mathbf{P}(2\mu_1 - 1)$ in der gemeinsamen Basis $(1, \mu, \mu^2, \dots, \mu^M)$ ausdrückt und die Matrix der Koeffizienten von $\mathbf{P}(\mu_1)$ invertiert.

Die Quellfunktion $B(\mu, \tau)$ (Gl. 2.10) wird unter dieser Transformation und Benutzung von Gl. (2.48) (und Unterdrückung der Abhängigkeit von ω^\pm von α und Θ) zu

$$B(\mu, \tau) = \frac{1}{4} [\mathbf{P}(\mu) \omega^+ \mathbf{Q}^+(\tau) + \mathbf{P}(\mu) \omega^- \mathbf{Q}^-(\tau)]. \quad (2.55)$$

Setzen wir dies in die Boltzmann-Gleichung (2.9) ein, ersetzen $\xi = 2\mu - 1$ für $\mu \geq 0$, multiplizieren mit $P_k(\xi)$ und integrieren über ξ von -1 bis 1 , so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-1}^1 d\xi \frac{\xi + 1}{2} P_k(\xi) J\left(\frac{\xi + 1}{2}, \tau\right) &= - \int_{-1}^1 d\xi P_k(\xi) J\left(\frac{\xi + 1}{2}, \tau\right) \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{i,j=0}^N \int_{-1}^1 d\xi P_k(\xi) P_i\left(\frac{\xi + 1}{2}\right) [\omega_{ij}^+ Q_j^+(\tau) + \omega_{ij}^- Q_j^-(\tau)]. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Die Indizes i, j, k laufen von 0 bis N . Im Fall $N > M$ sind die Matrixelemente von ω_{ij}^+ und ω_{ij}^- identisch 0 für $i, j > M$. Im Fall $N < M$ tragen nur die Matrixelemente mit $i, j \leq N$ bei. In beiden Fällen sind also die Matrizen formal $N + 1$ -dimensional. Unter Benutzung der Rekursionsbeziehung der Legendre-Polynome

$$\xi P_k(\xi) = \frac{k}{2k+1} P_{k-1}(\xi) + \frac{k+1}{2k+1} P_{k+1}(\xi), \quad (2.57)$$

kann man die linke Seite der Gleichung (2.56) in Form einer tridiagonalen Matrix schreiben, deren Elemente folgendermaßen definiert sind

$$Z_{kl} := \frac{k}{2k+1} \delta_{k,l+1} + \delta_{kl} + \frac{k+1}{2k+1} \delta_{k,l-1}. \quad (2.58)$$

Weiterhin definieren wir eine Matrix mit den Elementen

$$S_{ki} := \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\xi P_k(\xi) P_i\left(\frac{\xi + 1}{2}\right). \quad (2.59)$$

Unter Benutzung dieser Definitionen und nochmals Gl. (2.48) wird Gl. (2.56) zu

$$\sum_{l=0}^N Z_{kl} \frac{\partial Q_l^+(\tau)}{\partial \tau} = -2 Q_k^+(\tau) + \sum_{i,j=0}^N S_{ki} [\omega_{ij}^+ Q_j^+(\tau) + \omega_{ij}^- Q_j^-(\tau)]. \quad (2.60)$$

Mit der Definition der Diagonalmatrix

$$E_{jm} := (-1)^j \delta_{jm} \quad (2.61)$$

und unter Berücksichtigung der Symmetriebedingung (2.49) kann man nun Gl. (2.60) in Matrixform schreiben:

$$Z \frac{\partial \mathbf{Q}^+(\tau)}{\partial \tau} = -2 \mathbf{Q}^+(\tau) + \mathbf{S} [\omega^+ \mathbf{Q}^+(\tau) + \omega^- \mathbf{E} \mathbf{Q}^+(-\tau)]. \quad (2.62)$$

Dies kann noch etwas kürzer ausgedrückt werden. Mit den Definitionen

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &:= -2 \mathbf{1} + \mathbf{S} \omega^+, \\ \tilde{\mathbf{M}} &:= \mathbf{S} \omega^- \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (2.63)$$

kann die Boltzmann-Gleichung geschrieben werden als

$$Z \frac{\partial \mathbf{Q}^+(\tau)}{\partial \tau} = \mathbf{M} \mathbf{Q}^+(\tau) + \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{Q}^+(-\tau), \quad (2.64)$$

und repräsentiert ein System von $N + 1$ gekoppelten Differentialgleichungen. Für eine gegebene Plasmatemperatur im nicht-relativistischen Bereich ($\Theta \ll 1$) müssen die Momente $\langle v^k \rangle$ bis zu $k = L$ berechnet werden. Die Matrixelemente von \mathbf{M} und $\tilde{\mathbf{M}}$ sind dann Polynome in α mit maximaler Ordnung L . Im Falle hoher Plasmatemperaturen ($\Theta \gg 1$) hängen die Matrixelemente von \mathbf{M} und $\tilde{\mathbf{M}}$ von der unvollständigen Γ -Funktion ab (siehe Gl. 2.43).

2.4.4 Die Ortsabhängigkeit von $J(\mu, \tau)$

Gleichung (2.64) ist ein System gekoppelter Differentialgleichungen für die $N + 1$ Entwicklungskoeffizienten der Intensität $J(\mu, \tau)$, welche die τ -Abhängigkeit beschreiben. Entwickelt man nun diese Koeffizienten selbst in eine Reihe, so reduziert sich das Gleichungssystem zu einem algebraischen Eigenwertproblem. Ein Unterschied zu der Behandlung der Winkelabhängigkeit ist, daß wir die Randbedingung berücksichtigen müssen, nach der keine Strahlung von außen in die Scheibe eintritt:

$$J(\mu, \tau_0) \Big|_{\mu < 0} \equiv 0 \equiv J(\mu, -\tau_0) \Big|_{\mu > 0}. \quad (2.65)$$

An dieser Stelle führen wir eine neue Variable für die optische Tiefe ein:

$$y(\tau) = \frac{\tau}{\tau_0}. \quad (2.66)$$

Unter Benutzung dieser Transformation und Gl. (2.46) stellt die Randbedingung folgende Forderung an die Entwicklungskoeffizienten:

$$\mathbf{Q}^+(-1) = 0 = \mathbf{Q}^-(1). \quad (2.67)$$

Wir wählen eine Entwicklung von \mathbf{Q}^+ in Tschebyscheff–Polynome gemäß

$$\mathbf{Q}^+(y) = \mathbf{q}_0 + \sum_{i=1}^K [1 - T_i(-y)] \mathbf{q}_i, \quad (2.68)$$

wobei $\mathbf{Q}^-(y)$ gegeben ist durch die Symmetriebedingung (2.49). Die Randbedingung liefert dann $\mathbf{q}_0 = 0$. Setzt man dies in Gl. (2.64) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_0} \sum_{i=1}^K (-1)^{i+1} \frac{\partial T_i(y)}{\partial y} Z \mathbf{q}_i &= \sum_{i=1}^K [\mathbf{M} + \tilde{\mathbf{M}}] \mathbf{q}_i \\ &+ \sum_{i=1}^K T_i(y) [(-1)^{i+1} \mathbf{M} - \tilde{\mathbf{M}}] \mathbf{q}_i. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Nach Multiplikation mit $T_j(y)/\sqrt{1-y^2}$ und Integration über y von -1 bis 1 wird dies zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_0} \sum_{i=1}^K (-1)^{i+1} \int_{-1}^1 dy \frac{T_j(y) \frac{\partial T_i(y)}{\partial y}}{\sqrt{1-y^2}} Z \mathbf{q}_i &= \sum_{i=1}^K \int_{-1}^1 dy \frac{T_j(y)}{\sqrt{1-y^2}} [\mathbf{M} + \tilde{\mathbf{M}}] \mathbf{q}_i \\ &+ \sum_{i=1}^K \int_{-1}^1 dy \frac{T_j(y) T_i(y)}{\sqrt{1-y^2}} [(-1)^{i+1} \mathbf{M} - \tilde{\mathbf{M}}] \mathbf{q}_i. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Dies ist eine Vektorgleichung mit $K \times K$ Matrizen, definiert durch die Integrale über die Tschebyscheff–Polynome. Wir bezeichnen diese Matrizen mit

$$\begin{aligned} (\mathbb{T}_d)_{ji} &:= \int_{-1}^1 dy \frac{T_j(y) \frac{\partial T_i(y)}{\partial y}}{\sqrt{1-y^2}}, \\ (\mathbb{T}_o)_{ji} &:= \int_{-1}^1 dy \frac{T_j(y) T_i(y)}{\sqrt{1-y^2}}, \\ (\mathbb{T}_h)_{ji} &:= \int_{-1}^1 dy \frac{T_j(y)}{\sqrt{1-y^2}}, \\ (\mathbb{E}_t)_{ik} &:= (-1)^{i+1} \delta_{ik}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Die Matrixelemente können mit Hilfe der Orthogonalitätsrelationen für Tschebyscheff–Polynome leicht berechnet werden:

$$\int_{-1}^1 dy \frac{T_j(y) T_i(y)}{\sqrt{1-y^2}} = \begin{cases} 0 & : i \neq j \\ \pi/2 & : i = j \neq 0 \\ \pi & : i = j = 0 \end{cases}, \quad (2.72)$$

Die Relation für die Ableitung lautet

$$\frac{dT_i(y)}{dy} = \frac{-iyT_i(y) + iT_{i-1}(y)}{(1-y^2)}, \quad (2.73)$$

und die Rekursionsrelation ist

$$T_{i+1}(y) = 2yT_i(y) - T_{i-1}(y). \quad (2.74)$$

Die Randbedingung $\mathbf{q}_0 = 0$ ist in den obigen Gleichungen nicht explizit enthalten, sie muß „per Hand“ in Gl. (2.70) eingeführt werden. Dies kann geschehen durch Erweiterung der Gleichungen zu $i, j = 0, \dots, K$ und Addition der Gleichungen

$$\sum_{i=0}^K C_{ji} \mathbf{q}_i = 0, \quad (2.75)$$

mit

$$(C)_{ji} = \begin{cases} 1 & : j = K \text{ und } i = 0 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}. \quad (2.76)$$

Alle anderen Matrizen müssen für $j = K$ zu 0 gesetzt werden. Die Matrizen sind dann gegeben durch

$$\begin{aligned} (T_d)_{ji} &= \begin{cases} i\pi & : i > j \text{ und } i+j = \text{ungerade} \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}, \\ (T_o)_{ji} &= \begin{cases} 0 & : i \neq j \text{ oder } j = K \\ \pi/2 & : i = j \neq 0 \text{ und } j \neq K \\ \pi & : i = j = 0 \end{cases}, \\ (T_h)_{ji} &= \begin{cases} \pi & : j = 0 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Es ist nützlich, die Gl. (2.70) in einer übersichtlicheren Weise zu schreiben. Es ist eine Vektorgleichung, in der die Elemente selbst wieder Vektoren sind, welche mit Matrizen multipliziert werden. Diese Form der Matrixmultiplikation ist das äußere Produkt, welches mit \otimes bezeichnet wird. Die $K+1$ Vektoren der Dimension $N+1$ können als ein gemeinsamer Vektor im $(K+1) \cdot (N+1)$ -dimensionalen Produktraum geschrieben werden:

$$\underline{\mathbf{q}} := \begin{pmatrix} \mathbf{q}_0 \\ \mathbf{q}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_K \end{pmatrix}. \quad (2.78)$$

Dieser Vektor $\underline{\mathbf{q}}$ enthält *alle* Koeffizienten der Winkel- und Ortsentwicklung von $J(\mu, \tau)$. Gleichung (2.70) kann somit geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\tau_0} (\mathbf{E}_t \mathbf{T}_d) \otimes \mathbf{Z} \right] \underline{\mathbf{q}} &= \left[\mathbf{C} \otimes \mathbb{1} + \mathbf{T}_h \otimes (\mathbf{M} + \tilde{\mathbf{M}}) \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{E}_t \mathbf{T}_o) \otimes \mathbf{M} - \mathbf{T}_o \otimes \tilde{\mathbf{M}} \right] \underline{\mathbf{q}}. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Wir bezeichnen die Matrix der linken Seite, welche von keinem Parameter abhängt, mit $\underline{\mathbf{A}} := (\mathbf{E}_t \mathbf{T}_d) \otimes \mathbf{Z}$, und die Matrix der rechten Seite, welche von α und Θ abhängt (durch $\omega^\pm(\alpha, \Theta)$ in \mathbf{M} und $\tilde{\mathbf{M}}$), mit $\underline{\mathbf{D}}(\alpha, \Theta)$. Gleichung (2.79) wird mit diesen Definitionen zu

$$\left[\frac{1}{\tau_0} \underline{\mathbf{A}} - \underline{\mathbf{D}}(\alpha, \Theta) \right] \underline{\mathbf{q}} \equiv \underline{\mathbf{F}}(\alpha, \Theta, \tau_0) \underline{\mathbf{q}} = 0. \quad (2.80)$$

Dies definiert ein algebraisches Eigenwertproblem für alle Entwicklungskoeffizienten $\underline{\mathbf{q}}$.

2.5 Ergebnisse

2.5.1 Der Spektralindex

Der Spektralindex α der comptonisierten Strahlung für eine Temperatur in den Bereichen $\Theta \ll 1$ oder $\Theta \gg 1$ und *beliebiger* optischer Tiefe $2\tau_0$, kann durch Lösung der Gl. (2.18) gefunden werden.

Es ist zu beachten, daß der Spektralindex der Exponent der v -abhängigen Funktionen D und D_1 in der Phasenfunktion ist. Für nicht-relativistische Plasmatemperaturen kann der Spektralindex wesentlich größer als 1 sein. In diesem Fall kann eine hohe Genauigkeit (besser als 1%) nur erreicht werden, wenn die Taylorentwicklung der Phasenfunktion in v bis zu sehr hoher Ordnung ausgeführt wird ($L = 16$ in Gl. 2.27). Diese Entwicklung wird repräsentiert durch eine Entwicklung bis zur 10. Ordnung in η ($M = 10$ in Gl. 2.27). Andererseits ist der Spektralindex im relativistischen Fall sehr viel geringer, so daß wir nur die führende Ordnung der Phasenfunktion-Entwicklungskoeffizienten $\omega_i(\alpha, \Theta)$ bezüglich des kleinen Parameters $1/\gamma$ berücksichtigen müssen. Die ersten vier Koeffizienten der Gl. (2.26) sind dann gegeben durch die Gln. (2.40), zusammen mit der Gl. (2.43). Der Spektralindex ist nicht abhängig von der Entwicklung der μ und τ Abhängigkeit der Intensität $J(\mu, \tau)$. Es ist mehr als ausreichend, $N = 10$ in Gl. (2.46) und $K = 10$ in Gl. (2.68) zu wählen. Die Ergebnisse sind angegeben für eine Plasmatemperatur $\Theta = k_B T_e / m_e$ von 0.01, 0.05, 0.1 und 0.15 im nicht-relativistischen Bereich. (Dies entspricht einer Temperatur $k_B T_e$ von etwa 5 keV, 26 keV, 51 keV und 77 keV). Im relativistischen Bereich sind Ergebnisse angegeben für $\Theta = 3.0, 4.0, 8.0$ und 10.0 (was einer Temperatur $k_B T_e$ von etwa 1.5 MeV, 2 MeV, 4 MeV und 5 MeV entspricht). Abbildung 2.3 zeigt den Spektralindex α über der optischen Tiefe τ_0 für die Entwicklungsparameter, die oben angegeben wurden (L, M, N und K).

Die Werte von α sind in guter Übereinstimmung mit Titarchuk & Lyubarskij (1995). Diese Autoren haben angenommen, daß die Quellfunktion $B(\mu, \tau)$ (Gl. 2.10) isotrop ist, also tatsächlich gar nicht von μ abhängt. Das ist sicherlich eine gute Näherung für $\tau_0 \gg 1$, was in diesem Fall auf eine ebenfalls annähernd isotrope Intensität führt (siehe Kap. 2.5.2). Um diese Einschränkung fallen zu lassen, sollten wegen der intrinsischen $1 + (\eta')^2$ Abhängigkeit des Thomson-Streuquerschnitts mindestens die ersten drei Entwicklungskoeffizienten der Phasenfunktion ($M = 0, 1, 2$) berücksichtigt werden. Insbesondere wenn $J(\mu, \tau)$ sehr anisotrop ist (was der Fall ist für $\tau_0 \ll 1$) hängt die Quellfunktion $B(\mu, \tau)$ von den höheren Entwicklungskoeffizienten ab, was eine Anisotropie von $B(\mu, \tau)$ bedeutet. Zum Beispiel wird für $\tau_0 = 0.05$ und $\Theta = 0.1$ die Anisotropie der Quellfunktion

an der Scheibenoberfläche

$$\frac{B(\mu = 0, \tau_0 = 0.05)}{B(\mu = 1, \tau_0 = 0.05)} = 2.3 . \quad (2.81)$$

Die Sensitivität von α auf die Winkelabhängigkeit der Quellfunktion ist allerdings nicht sehr stark und kann durch Mitnahme der ersten vier Legendre–Polynome ($M = 3$ in Gl. 2.27) ausreichend berücksichtigt werden. Dies ist in Tabelle 2.1 für $\tau_0 = 0.2, 1.0$ und 2.0 verdeutlicht (siehe auch Tabelle 1 in Gieseler & Kirk 1997b). Es ist zu beachten, daß selbst für einen Wert von $\alpha = 1.33$ die Taylorentwicklung in v bis zu sehr hoher Ordnung ausgeführt werden muß (hier: $L = 16$). Dies gilt unabhängig von den gewählten Werten für M .

Titarchuk & Lyubarskij (1995) haben zunächst Formeln angegeben, die gültig sind für $\tau_0 \ll 1$ bzw. $\tau_0 \gg 1$ und $\Theta \ll 1$ bzw. $\Theta \gg 1$ (siehe dort die Gln. 13, [14]¹¹, [18]¹² und [19]¹³ zusammen mit der Eigenwertgleichung 12). Für den nicht-relativistischen Bereich gilt dort der Gleichungssatz (12), (13) und (18). Dieser liefert z.B. für $\Theta = 0.1$ und $\tau_0 = 50$, $\alpha = 0.001068$, während die hier dargestellte Methode $\alpha = 0.001060$ liefert. Dies unterscheidet sich um weniger als 1%. Es ist allerdings zu bemerken, daß Gl. (18) eine Entwicklung in v bis zur ersten Ordnung ist und daher, wie oben diskutiert, signifikant verschiedene Werte für α zu den oben angegebenen liefert, falls $\alpha \gtrsim 1$ ist. Titarchuk & Lyubarskij (1995) haben außerdem die Interpolationsformeln (17) und (21) angegeben. Gleichung (21) unterscheidet sich für $\Theta \ll 1$ signifikant von Gl. (18), da dann $\alpha \gtrsim 1$ gilt, jedoch ist *damit* (bzw. mit Gl. 24) die Diskrepanz zu den hier in der Tab. 2.1 oder Abb. 2.3 angegebenen Werten für α über weite Bereiche nicht größer als 10%.

¹¹Gleichung (14) sollte lauten: $\lambda = \exp(-\beta) = \tau_0 \ln(1.258/\tau_0)$, da aus Gl. (11) mit $B_0(\tau) = \text{const}$ und $\tau_0 \ll 1$ folgt: $\lambda = 3\tau_0/2 - \gamma\tau_0 - \tau_0 \ln(2\tau_0)$, wobei $\gamma = 0.5772$ die Eulersche Konstante ist.

¹²Vgl. Gl. (2.31).

¹³Vgl. Gl. (2.43) für $i = 0$.

| $\Theta = \frac{k_B T_e}{m_e}$ | τ_0 | M | α |
|--------------------------------|----------|-----|----------|
| 0.15 | 0.2 | 0 | 1.37 |
| 0.15 | 0.2 | 1 | 1.34 |
| 0.15 | 0.2 | 2 | 1.33 |
| 0.15 | 0.2 | 3 | 1.33 |
| 0.15 | 1.0 | 0 | 0.480 |
| 0.15 | 1.0 | 1 | 0.462 |
| 0.15 | 1.0 | 2 | 0.460 |
| 0.15 | 1.0 | 3 | 0.460 |
| 0.15 | 2.0 | 0 | 0.222 |
| 0.15 | 2.0 | 1 | 0.212 |
| 0.15 | 2.0 | 2 | 0.212 |
| 3.0 | 0.2 | 0 | 0.220 |
| 3.0 | 0.2 | 1 | 0.212 |
| 3.0 | 0.2 | 2 | 0.211 |
| 3.0 | 0.2 | 3 | 0.211 |
| 3.0 | 1.0 | 0 | 0.0609 |
| 3.0 | 1.0 | 1 | 0.0544 |
| 3.0 | 1.0 | 2 | 0.0543 |
| 3.0 | 1.0 | 3 | 0.0543 |
| 3.0 | 2.0 | 0 | 0.0257 |
| 3.0 | 2.0 | 1 | 0.0218 |
| 3.0 | 2.0 | 2 | 0.0218 |

Tabelle 2.1: Spektralindex α für zwei Plasmatemperaturen und verschiedene Entwicklungsparameter M der Quellfunktion $B(\mu, \tau)$ und für optische Halb-Tiefen $\tau_0 = 0.2, 1.0$ und 2.0 .

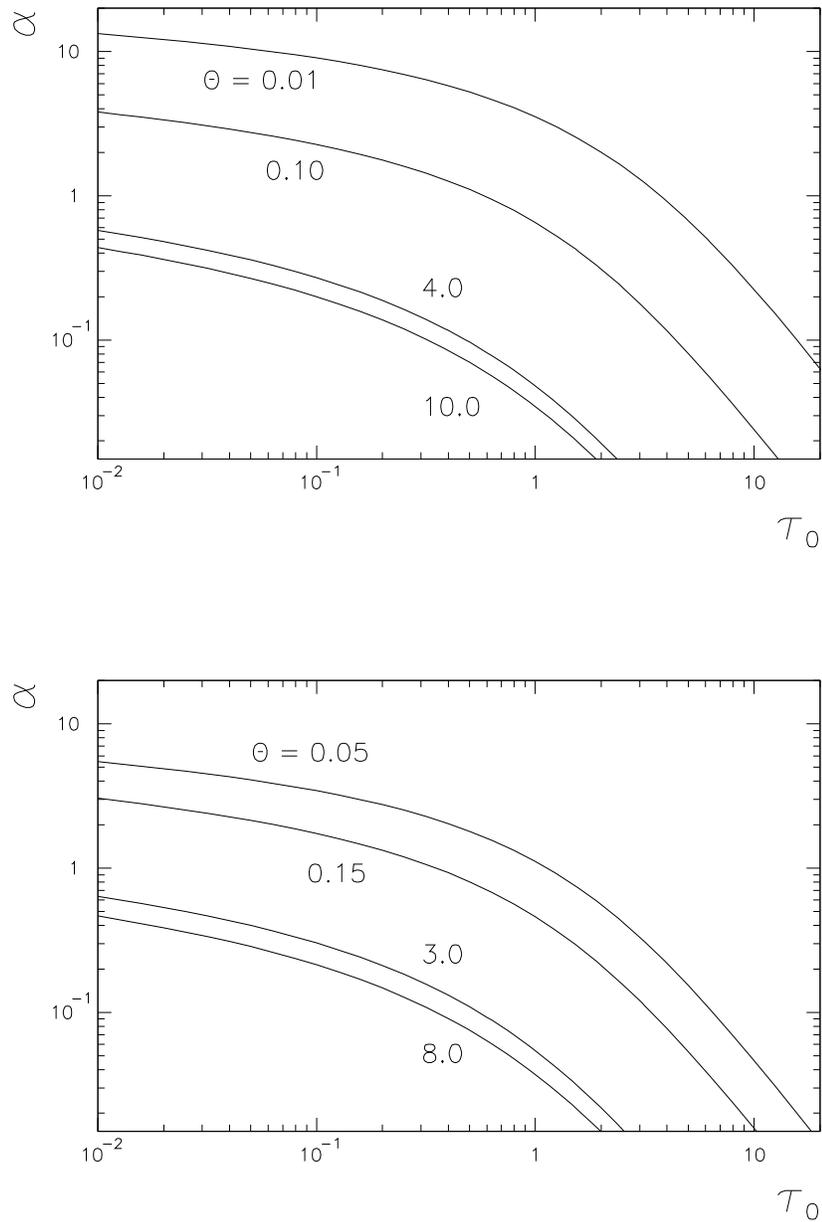


Abbildung 2.3: Spektralindex α über optische Tiefe τ_0 für nicht-relativistische und relativistische Plasmatemperaturen $\Theta = k_B T_e / m_e$.

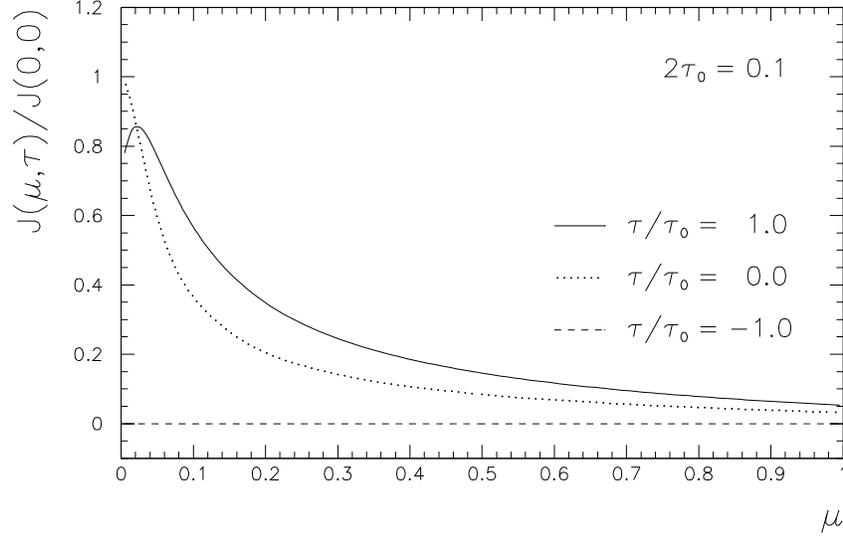


Abbildung 2.4: Winkelabhängigkeit der spezifischen Intensität $J(\mu, \tau)$ für eine optische Tiefe von $2\tau_0 = 0.1$. Die Intensität an der Oberfläche der Scheibe ist gegeben durch $\tau/\tau_0 = 1.0$. Die Anisotropie der integrierten Intensität ist $A(\tau_0) \equiv (J_{\parallel} - J_{\perp})/(J_{\parallel} + J_{\perp}) = 0.82 \pm 0.03$ für einen großen Temperaturbereich. (Entwicklung bis $N = 16$ und $K = 10$).

2.5.2 Die Winkelabhängigkeit

Wie in Kap. 2.3 beschrieben wurde, erhält man durch eine ‘singular value decomposition’ der Matrix $\underline{\underline{E}}$ die Intensität $J(\mu, \tau)$ in Form eines Polynoms der Ordnung K in τ/τ_0 , und der Ordnung N in μ . Für die hier dargestellten und diskutierten Abbildungen der Intensität wählen wir eine Temperatur von $k_B T_e = 5$ keV, bzw. $\Theta = k_B T_e/m_e = 5/511$ sowie die Entwicklungsparameter $L = 16$ und $M = 6$ (siehe Gl. 2.27) für die Darstellung der Phasenfunktion. Die für eine Konvergenz notwendige Entwicklungstiefe der Orts- und Winkelabhängigkeit (K und N) muß für verschiedene optische Tiefen τ_0 speziell gewählt werden (siehe die Beschreibungen zu den Abbildungen). Die Verteilungen der Abb. 2.4–2.6 zeigen die Intensität $J(\mu, \tau)$, normiert auf die parallel zur Oberfläche gerichtete Intensität in der Mitte der Scheibe: $J(0, 0)$.

Da wir insbesondere an *nicht*-isotropen Intensitätsverteilungen interessiert sind, definieren wir ein Maß für die Anisotropie von $J(\mu, \tau)$. Zunächst sei $J_{\parallel}(\tau)$ und $J_{\perp}(\tau)$ die über einen kleinen Winkelbereich $\Delta\mu = 0.1$ integrierte Intensität

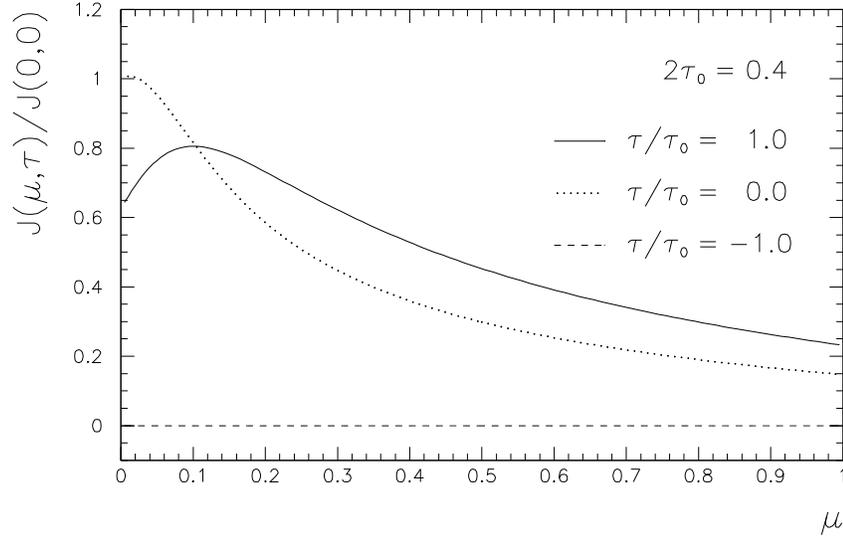


Abbildung 2.5: Winkelabhängigkeit der spezifischen Intensität $J(\mu, \tau)$ für eine optische Tiefe von $2\tau_0 = 0.4$. Die Intensität an der Oberfläche der Scheibe ist gegeben durch $\tau/\tau_0 = 1.0$. Die Anisotropie der integrierten Intensität ist $A(\tau_0) \equiv (J_{\parallel} - J_{\perp}) / (J_{\parallel} + J_{\perp}) = 0.47 \pm 0.03$ für einen großen Temperaturbereich. (Entwicklung bis $N = 12$ und $K = 14$).

parallel und senkrecht zur Scheibenoberfläche:¹⁴

$$\begin{aligned}
 J_{\parallel}(\tau) &:= \int_0^{0.1} d\mu J(\mu, \tau) , \\
 J_{\perp}(\tau) &:= \int_{0.9}^1 d\mu J(\mu, \tau) .
 \end{aligned} \tag{2.82}$$

Damit definieren wir nun die Anisotropie¹⁵ A , welche 0 ist für eine isotrope Intensität, und 1 für eine extrem in Richtung Scheibenoberfläche fokussierte Intensität:

$$A(\tau_0) := \frac{J_{\parallel}(\tau_0) - J_{\perp}(\tau_0)}{J_{\parallel}(\tau_0) + J_{\perp}(\tau_0)} . \tag{2.83}$$

Bei einer optischen Tiefe in der Größenordnung 1 ($2\tau_0 \simeq 1$) ist diese Anisotropie ungefähr 0 (siehe Abb. 2.6). Für kleinere Werte von τ_0 kann $A(\tau_0)$ sehr nahe an 1 sein, wie in Abb. 2.4 gezeigt, in der $J(\mu, \tau)$ für $2\tau_0 = 0.1$ dargestellt ist. Für

¹⁴Diese Größen sind quasi unabhängig von Randeffekten, die bei einem sehr steilen Verlauf von $J(\mu, \tau)$ auftreten können.

¹⁵In Analogie zur Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie der elektroschwachen Wechselwirkung.

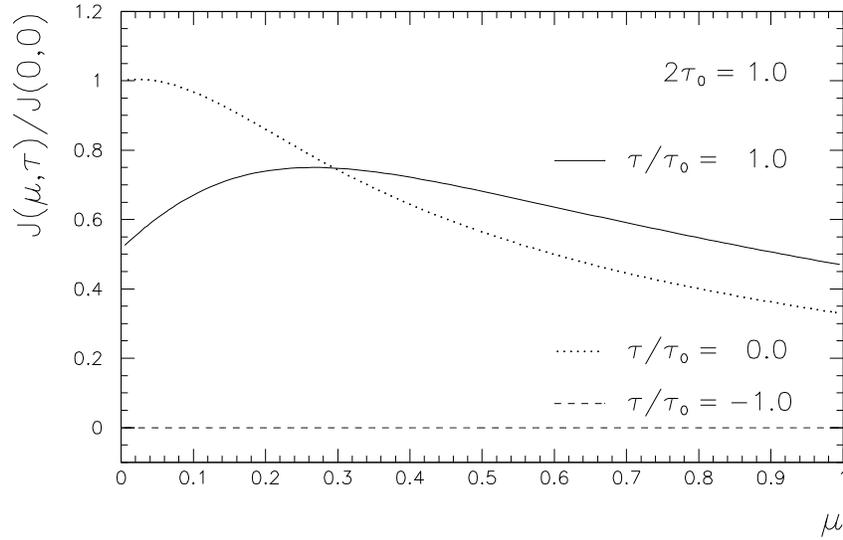


Abbildung 2.6: Winkelabhängigkeit der spezifischen Intensität $J(\mu, \tau)$ für eine optische Tiefe von $2\tau_0 = 1.0$. Die Intensität an der Oberfläche der Scheibe ist gegeben durch $\tau/\tau_0 = 1.0$. Die Anisotropie der integrierten Intensität ist $A(\tau_0) \equiv (J_{\parallel} - J_{\perp})/(J_{\parallel} + J_{\perp}) = 0.08 \pm 0.02$ für einen großen Temperaturbereich. (Entwicklung bis $N = 8$ und $K = 16$).

$2\tau_0 = 0.06$ erhält man $A(\tau_0) = 0.88 \pm 0.03$ (siehe Gieseler & Kirk 1997c). Die Randbedingung liefert $J(\mu, \tau = -\tau_0) \equiv 0$ für $0 < \mu \leq 1$ (keine Strahlung im Frequenzbereich des Potenzgesetzes dringt von außen in die Scheibe ein), siehe die gestrichelte Linie. Die gepunktete Linie zeigt die Intensität in der Mittelebene der Scheibe ($\tau = 0$), während die durchgezogene Linie gegeben ist durch $J(\mu, \tau = \tau_0)$ und die Intensität an der Scheibenoberfläche darstellt. Die normierte spezifische Intensität ist quasi unabhängig von der Plasmatemperatur. Wie von Titarchuk & Lyubarskij (1995) gezeigt wurde, ist im Falle einer exakt isotropen Quellfunktion die Elektronenenergie völlig unabhängig von den räumlichen Variablen des Photons. Dies ermöglichte den o.g. Autoren das Aufstellen der nur von der Elektronentemperatur, dem Spektralindex und der optischen Tiefe abhängigen Eigenwertgleichung (11). Allerdings hat (wie in Kap. 2.5.1 diskutiert wurde) die Quellfunktion eine Winkelabhängigkeit, was zu einer Kopplung der Winkelverteilung der Photonen und der Plasmatemperatur führt. Die Variation der Winkelverteilungen in Abhängigkeit von Θ ist jedoch nicht sehr stark. Diese ist in Form eines Fehlers in der Anisotropie ausgedrückt. Die obere Grenze ist gültig für $\Theta = 0.01$, während die untere Grenze für $\Theta = 100$ berechnet wurde.

Selbst für eine moderat kleine optische Tiefe von $2\tau_0 = 0.1$ (siehe Abb. 2.4) ist die Anisotropie $A(\tau_0) = 0.82 \pm 0.03$. Dies bedeutet, daß die Intensität in dem

Intervall $0 \leq \mu \leq 0.1$ parallel zur Scheibenoberfläche um einen Faktor von etwa 10 höher ist, als die entsprechende Intensität im Intervall $0.9 \leq \mu \leq 1$ senkrecht zur Oberfläche. Für eine kleinere Winkelauflösung (kleineres Intervall $\Delta\mu$) ist dieser Faktor sogar noch größer.

Der Grund für diese hohe Anisotropie ist der folgende: Die Photonen, welche zum Potenzgesetz-Teil des Spektrums beitragen, müssen oft an Elektronen gestreut werden, um diese Energie zu erreichen. Der Energiegewinn ist maximal für eine Reflexion der Photonen ($\Delta\theta = 180^\circ$). Das bedeutet, daß gerade *die* Photonen, welche am effektivsten Energie gewinnen und eine geringe Wahrscheinlichkeit haben die Scheibe zu verlassen, jene sind, welche sich parallel zur Scheibenoberfläche bewegen. Dies gilt umso strenger, je (optisch) dünner die Scheibe ist, und führt in diesem Fall zu einer starken Kollimation parallel zur Scheibenoberfläche.

2.5.3 Die Ortsverteilung

Die Intensität $J(\mu, \tau)$ liefert natürlich nicht nur die Winkelverteilung, sondern auch die Ortsverteilung der Strahlung in der Scheibe. Die oben diskutierte Lösung ergibt $J(\mu, \tau)$ für den Halbraum $0 \leq \mu \leq 1$. Eine über den ganzen Winkelbereich integrierte Intensität an jedem Raumpunkt erfordert dann die Summe der beiden Halbraum-Intensitäten, welche symmetrisch zur Mittelebene der Scheibe ist. Um die Ortsverteilung mit den Abbildungen des Kap. 2.5.2 vergleichen zu können, ist hier $J(\mu, \tau)$ für dieselben Parameter und ebenfalls nur für den Halbraum $0 \leq \mu \leq 1$ dargestellt.

Abb. 2.7 zeigt die gemäß Gl. (2.82) definierte Intensität J_{\parallel} parallel zur Scheibenoberfläche für verschiedene optische Tiefen, normiert auf die parallele Intensität an der Oberfläche. Bei $\tau = -\tau_0$ verschwindet die Intensität, da für $0 \leq \mu \leq 1$ die Randbedingung $J(\mu, \tau = -\tau_0) = 0$ lautet. Abbildung 2.8 zeigt die Intensität senkrecht zur Scheibe. Es ist zu beachten, daß die Skala im Vergleich zur Abb. 2.7 unterschiedlich ist. Ein Vergleich der Abb. 2.7 mit Abb. 2.8 liefert die Anisotropie $A(\tau)$ für alle Werte von τ . Da die senkrechte Intensität J_{\perp} schneller abfällt als die parallele J_{\parallel} , ist die Anisotropie $A(\tau < \tau_0)$ sogar noch größer als $A(\tau_0)$, welches in den Beschreibungen der Abb. 2.4–2.6 angegeben ist.

Zunächst erwarten wir ein Maximum der Intensität in der Scheibenmitte ($\tau = 0$), da die Oberflächen Senken der Strahlung darstellen. Dazu müssen wir aber die gesamte Strahlung in dem Bereich $-1 \leq \mu \leq 1$ berücksichtigen. Unter Verwendung der Symmetriebedingung (Gl. 2.44) ist diese gegeben durch

$$\begin{aligned} J(\mu, \tau) \Big|_{-1 \leq \mu \leq 1} &= J(\mu, \tau) \Big|_{0 \leq \mu \leq 1} + J(\mu, \tau) \Big|_{-1 \leq \mu < 0} \\ &= J(\mu, \tau) + J(\mu, -\tau). \end{aligned} \quad (2.84)$$

Das bedeutet eine Addition der um $\tau = 0$ gespiegelten Intensität. Tatsächlich zeigen die gemäß dieser Gleichung addierten Verteilungen für J_{\perp} und J_{\parallel} ein Maximum an der Stelle $\tau = 0$.

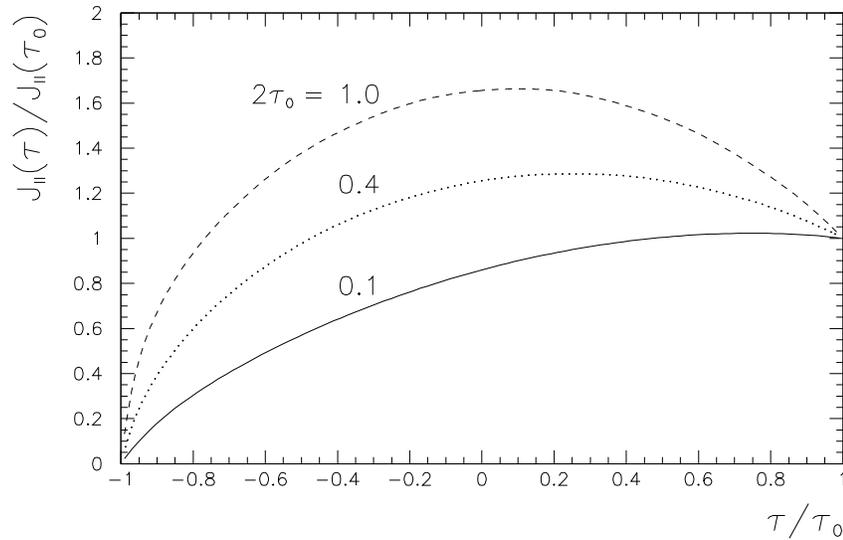


Abbildung 2.7: Ortsverteilung der Intensität *parallel* zur Scheibe (definiert in Gl. 2.82), normiert auf die parallele Intensität an der Oberfläche der Scheibe. Es ist zu beachten, daß dieser Graph den Beitrag des *Halb*-Raumes $0 \leq \mu \leq 1$ zeigt.

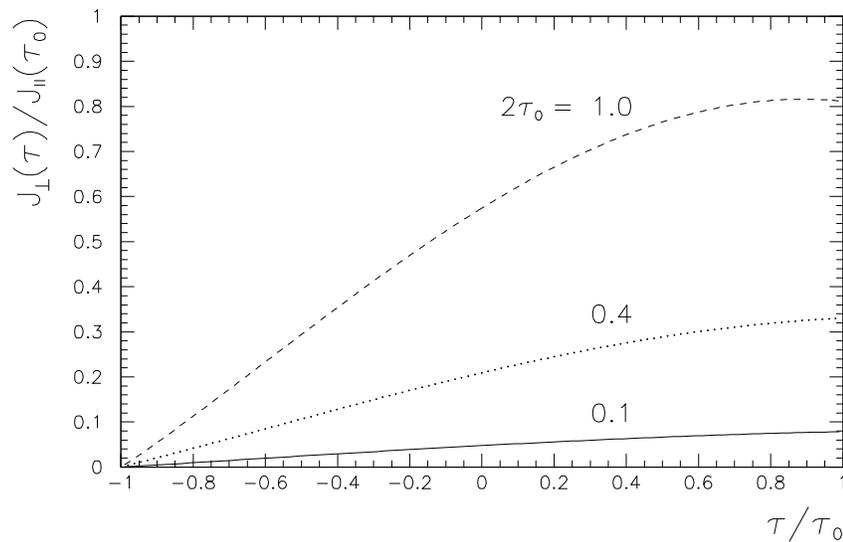


Abbildung 2.8: Ortsverteilung der Intensität *senkrecht* zur Scheibe (definiert in Gl. 2.82), normiert auf die parallele Intensität an der Oberfläche der Scheibe. Es ist zu beachten, daß dieser Graph den Beitrag des *Halb*-Raumes $0 \leq \mu \leq 1$ zeigt.

2.6 Diskussion und Ausblick

In diesem Kapitel wurde eine semi-analytische Methode zur Lösung des Comptonisierungs-Problems dargestellt. Diese Methode wurde angewendet, um den Spektralindex und die Intensitätsverteilung von Photonen zu bestimmen, die durch Thomson-Streuung an Elektronen Energie gewonnen haben. Da dieser Prozeß sehr viele einzelne Streuungen voraussetzt bevor die Photonen mit einer um Größenordnungen höheren Energie die Scheibe verlassen, ist die Intensitätsverteilung unabhängig von der Verteilung bei ihrer Injektion bei niedrigen Frequenzen. Im Bereich des Potenzgesetzes, welches unabhängig von der optischen Tiefe des Plasmas existiert, ist die Orts- und Winkelabhängigkeit keine Funktion der Frequenz. Sie ist bestimmt durch Eigenfunktionen der reduzierten Transportgleichung und hängt von der optischen Tiefe und der Temperatur des Plasmas ab. Im Unterschied zu numerischen Methoden konnten diese Eigenfunktionen explizit berechnet werden. Haardt (1993) hat z.B. eine Näherung benutzt, die die Anisotropie der Intensität nur bei der ersten Streuung eines Photons berücksichtigt, so daß dessen Ergebnisse nur sehr nahe bei der Injektionsfrequenz Gültigkeit besitzen. Poutanen & Svensson (1996) haben ein auf einer iterativen Methode basierendes umfangreiches Programm entwickelt, welches die Anisotropie exakt (auf einem Gitter) behandelt, und verschiedenen Prozesse berücksichtigt, welche hier vernachlässigt worden sind. Diese Methode konvergiert sehr schnell in dem Fall, daß nur wenige Streuprozesse zu berücksichtigen sind, d.h. bei kleinen optischen Tiefen und hoher Plasmatemperatur. Für eine Darstellung der Intensität wie in Abb. 2.4, oder Abb. 2 in Gieseler & Kirk (1997c), wäre jedoch eine sehr große Anzahl von Gitterpunkten nötig.

Um die Ergebnisse auf astrophysikalische Beobachtungen anzuwenden, betrachten wir einen Spektralindex im Bereich um $\alpha = 3$ und darunter, da steilere Spektren wahrscheinlich nicht beobachtet werden können. Ein Spektralindex in diesem Bereich kann durch ein nicht-relativistisches Plasma mit optischer Tiefe $\tau_0 \gtrsim 1$ oder ein relativistisches Plasma mit $\tau_0 \lesssim 1$ erhalten werden (siehe Abb. 2.3). Die Annahme von Thomson-Streuung (im Gegensatz zu Klein-Nishina) beschränkt den relevanten Frequenzbereich auf $x < 1/\langle\gamma\rangle$ (wobei $\langle\gamma\rangle$ der gemittelte Lorentz-Faktor gemäß Gl. 2.29 ist), d.h. auf Röntgenstrahlen für die höchsten hier betrachteten Plasmatemperaturen. Außerdem nehmen wir an, daß die Quelle die Photonen bei niedrigen Frequenzen injiziert, so daß diese mehr als eine Streuung durchführen, bevor sie Energien im Röntgenbereich erreichen. Anderenfalls kann dort kein reines Potenzgesetz erzeugt werden. Die mittlere Frequenzänderung pro Streuung ist gegeben durch $\langle\Delta x\rangle/x \simeq 4\Theta$ im nicht-relativistischen Bereich und durch $\langle\Delta x\rangle/x \simeq (4\Theta)^2$ für relativistische Temperaturen (siehe Pozdnyakov et al. 1983).

Betrachten wir als Beispiel ein Plasma mit der Temperatur $k_B T_e = 50 \text{ keV}$ und Photonen bei einer ursprünglichen Energie von 5 eV. Nach 20 Streuungen

ist die gesamte Information ihrer anfänglichen Verteilung verloren gegangen. Die Photonen haben dann in etwa eine Energie von 4 keV. Daraus folgt eine dimensionslose Photonenenergie von $x = 0.008$, was sehr viel kleiner als $1/\langle\gamma\rangle = 0.86$ ist. Bei einer optischen Tiefe von $2\tau_0 = 0.4$ ist die Intensität an der Oberfläche der Scheibe parallel zu ihr (J_{\parallel}) drei mal so groß wie die Intensität an dieser Stelle senkrecht zur Scheibe (J_{\perp}), ($A(\tau_0) = 0.49$, vgl. Abb. 2.5). Der Spektralindex bei dieser optischen Tiefe beträgt $\alpha = 1.77$. Bei relativistischen Plasmatemperaturen kann ein Spektralindex zwischen 0 und 1 bei sehr dünnen Scheiben ($\tau_0 \ll 1$) erzeugt werden, was zu einer sehr großen Anisotropie $A(\tau_0)$ führt. Die entsprechende Ausgangsenergie der Photonen muß dazu aber sehr viel kleiner als 5 eV sein, um die Energieverschiebung in den Röntgenbereich mit mehr als einer Streuung zu vollziehen.

Im besonderen sind die hier dargestellten Ergebnisse bezüglich der Anisotropie (welche nur sehr schwach von der Temperatur abhängt) relevant für Seyfert-Galaxien, bei denen man Plasmatemperaturen in der Größenordnung von 100 keV erwartet (Titarchuk & Mastichiadis 1994; Zdziarski et al. 1995). In diesen Objekten sollte daher das Verhältnis der optischen zur Röntgenstrahlung bei Galaxien, die unter großem Winkel zur Scheibennormalen gesehen werden, viel kleiner sein als bei Galaxien, die entlang der Normalen beobachtet werden (dieser Effekt wurde von Haardt & Maraschi 1993 vorhergesagt).

Abgesehen von Anwendungen auf astrophysikalisch relevante Objekte ist die hier dargestellte Methode hilfreich bei der Überprüfung anderer numerischer Lösungsmethoden. Wie in Kapitel 1.1.1 erwähnt, haben wir eine über die Polarisation der Photonen gemittelte Beschreibung des Transports benutzt. Alle bis heute benutzten Monte-Carlo-Programme benutzen eben diese Näherung und sind damit direkt vergleichbar mit den hier angegebenen Ergebnissen. Eine Einbeziehung der Polarisation ist durchaus möglich. Die dazu zu betrachtenden zwei gekoppelten Transportgleichungen erfordern dann eine Verdoppelung der Dimension der Matrixgleichung (2.19). Ebenso kann diese Methode auch auf andere Geometrien angewendet werden. Von besonderem Interesse ist dabei eine sphärisch symmetrische Geometrie.

Eine Berechnung des Spektrums über den gesamten Bereich, von der Energie einer vorgegebenen Photonenquelle bis hin zur Region des Potenzgesetzes, erfordert die Lösung des inhomogenen Problems, d.h mit expliziter Berücksichtigung eines Quellterms. Gerade mit der hier dargestellten Methode ist es nun möglich dieses Problem zu lösen, da die hier gefundenen Eigenfunktionen zur Konstruktion einer Greensfunktion benutzt werden können. Insbesondere wird bei der Lösung der Gl. (2.18) auch der entsprechende Index α mit negativem Vorzeichen erhalten, der den Teil des Spektrums der durch Compton-Streuung in der Energie reduzierten Photonen beschreibt. Ebenso wie der Potenzgesetz-Index für höhere Energien hat dieser zunächst nur im ausreichenden Abstand von der Quellenenergie

gie Gültigkeit. Mit den zugehörigen Eigenfunktionen der spezifischen Intensität läßt sich nun jedoch eine Greensfunktion für die mit einer Delta-Funktion bei einer bestimmten Energie injizierten Photonen angeben, die die Grundlage zur Lösung des inhomogenen Problems bildet. Eine solche Lösung könnte dann letztlich an ein beobachtetes Spektrum angepaßt werden.

Kapitel 3

Beschleunigung geladener Teilchen

Die kosmische Strahlung bietet die direkteste Möglichkeit, geladene Teilchen zu beobachten, die ihre Energie nicht durch ein thermisches Gleichgewicht erhalten haben, sondern durch einen individuellen in der Natur vorkommenden Beschleunigungsprozeß. Das Energiespektrum folgt über einen sehr großen Bereich mit hoher Genauigkeit einem Potenzgesetz. So ist die Impulsdichteverteilung $N(p)$ der kosmischen Nukleonen, die die Erde erreichen, zwischen 100 und 10^6 GeV/Nukleon gegeben durch

$$N(p) \propto p^{2-s}, \quad (3.1)$$

mit dem Spektralindex

$$s = 4.71 \pm 0.05 \quad (3.2)$$

(siehe z.B. Gaisser 1990; Berezhinskiĭ et al. 1990; Longair 1992; Kirk et al. 1994). Oberhalb von etwa 10^7 GeV (das sog. „Knie“) ist das Spektrum steiler, mit einem Index von etwa 5, welcher sich bis zu 10^{10} GeV fortsetzt. Für noch höhere Energien wird das Spektrum wieder flacher. Der Spektralindex für die kosmischen Teilchen mit den höchsten gemessenen Energien entzieht sich aber naturgemäß einer genauen Vermessung.

Als Quelle der kosmischen Strahlen wurden schon sehr früh Supernova-Überreste vorgeschlagen (Baade & Zwicky 1934). Betrachtungen des globalen Energiehaushaltes deuten an, daß in diesem Fall etwa 10% der bei der Supernova freiwerdenden Energie in kosmische Strahlen umgesetzt werden muß. Bei der Bestimmung der Richtung der an der Erde ankommenden kosmischen Strahlung ergibt sich für den niederenergetischen Anteil kein Hinweis auf eine Anisotropie. Dies ist jedoch wegen der galaktischen magnetischen Felder, die die Teilchenbahnen bei diesen Energien effektiv ablenken können, kein Widerspruch zu einer

galaktischen Herkunft der Strahlen. Nimmt man eine galaktische Quelle der kosmischen Strahlen an, so führt im einfachsten Modell („leaky box“) eine gemäß $t_{\text{esc}} \propto p^{-0.6}$ vom Impuls abhängige Entweichzeit aus der galaktischen Umgebung auf einen Spektralindex von $s \approx 4.1$ für das Spektrum, das durch die galaktischen Quellen erzeugt worden ist. Supernova-Überreste weisen außerdem noch durch die Synchrotronstrahlung nicht-thermischer Elektronen auf ihre Eigenschaft als Teilchenbeschleuniger hin. Neben Supernova-Überresten treten Stoßfronten, die ebenfalls geeignet sind in Verbindung mit einem Magnetfeld, geladenen Teilchen ein nicht-thermisches Spektrum zu verleihen, in vielen weiteren astrophysikalischen Objekten auf (siehe Blandford & Eichler 1987).

Eine besondere Rolle bei der Teilchenbeschleunigung in (z.B.) Supernova-Überresten spielen die senkrechten Stoßfronten, bei denen das Magnetfeld senkrecht zur Stoßnormalen gerichtet ist. Hier ist die Beschleunigung besonders effektiv (Jokipii 1987). Wichtig dabei ist der Transport der Teilchen entlang der Stoßnormalen, da davon die Anzahl der Stoßkreuzungen abhängt. Die Diffusion von Teilchen senkrecht zu Magnetfeldlinien ist in der Regel sehr klein ($\kappa_{\perp} \ll \kappa_{\parallel}$), so daß dieser Transport durch die stochastische Komponente des Magnetfeldes dominiert werden kann, das die Hauptkomponente \mathbf{B}_0 senkrecht zur Stoßnormalen hat.¹ Wie in Kapitel 1.2 gezeigt wurde, ist dies durch ein *sub*-diffusives Transportverhalten geprägt. Um die elementaren Eigenschaften des Zusammenspiels aus Stoßfront und Magnetfeld näher zu untersuchen, beschränken wir uns zunächst auf nicht-relativistische Stöße. Insbesondere sind die hier zu Grunde gelegten Eigenschaften der Stoßfronten selbst ebenso universell wie idealisiert. Wir betrachten infinitesimal dünne Diskontinuitäten in einem magnetisierten Plasmastrom. Im Kapitel 3.1 sind die entscheidenden Mechanismen dargestellt, die bei solchen Stoßfronten Teilchenbeschleunigung bewirken. In den folgenden Abschnitten wird dann der Einfluß dieser *sub*-Diffusion auf die Verteilungen der Teilchen und insbesondere auf das Impulsspektrum untersucht. Es zeigt sich, daß das Impulsspektrum signifikant von den Transporteigenschaften abhängt.

Man unterscheidet zwei Beschleunigungsprozesse, deren statistischer Charakter unterschiedlich ist. Bei der Fermi-Beschleunigung werden Teilchen durch Streuung an magnetischen Irregularitäten bzw. Fluktuationen (z.B. Alfvén-Wellen) gestreut und so fortlaufend über die Stoßfront transportiert, bis sie im Unterlauf entkommen können. Ist bei einer senkrechten (bzw. ‘superluminalen’) Stoßfront die Bewegung senkrecht zum Magnetfeld zu vernachlässigen oder findet bei beliebig geneigten Magnetfeldern keine Streuung statt, die die Teilchen entlang der Feldlinie transportieren, so gibt es keine Möglichkeit für eine wiederholte Stoßkreuzung. In diesem Fall muß der Beschleunigungsprozeß durch die Betrachtung einer einzelnen Stoßkreuzung beschrieben werden. Diese Drift-

¹Wir wählen für die Stoßnormale die Richtung entlang der Koordinatenachse x , und für \mathbf{B}_0 bei zweidimensionaler Betrachtungsweise die Richtung z , vgl. Abb. 3.1–3.4.

Beschleunigung ist ein vollständig deterministischer Prozeß. In den Kapiteln 3.1.1 und 3.1.2 werden diese Prozesse näher dargestellt.

Für die Simulation der Beschleunigung bei senkrechten Stoßfronten mit stochastischem Magnetfeld werden diese beiden Prozesse kombiniert. Dies geschieht dadurch, daß der Koordinatensatz (p, μ, \mathbf{x}) jedes simulierten Teilchens fortlaufend betrachtet und bei Stoßkreuzung gemäß des Drift-Prozesses umgerechnet wird. Darüberhinaus sorgt Pitchwinkelstreuung für eine diffusive Bewegung entlang des Magnetfeldes. Da nun bei stochastischem Magnetfeld auch eine Komponente parallel zur Stoßnormalen existiert, können Teilchen dadurch wiederholt die Stoßfront unter verschiedenen Neigungswinkeln kreuzen. Insbesondere erzeugt dieser kombinierte Transport durch das stochastische Magnetfeld und der diffusiven Teilchenbewegung entlang des Magnetfeldes ein *anomales* Transportverhalten der Teilchen im Raum. Die Monte-Carlo-Simulation des Teilchentransportes und der daraus resultierenden Beschleunigung ist schließlich im Kapitel 3.3 dargestellt.

3.1 Beschleunigungs-Mechanismen

Die in Kapitel 1.1.2 angegebenen Transportgleichungen waren unter der Annahme von verschwindendem elektrischen Feld und vernachlässigbarer Diffusion im Impulsraum hergeleitet worden. Für einen kontinuierlichen Plasmafluß, d.h. $\partial u / \partial x = 0$ wird Gl. (1.27) daher zu einer reinen Diffusions-Konvektions-Gleichung für die Ortsabhängigkeit der Teilchendichte $n(p, x, t)$. Die einzige Quelle für eine Impulsänderung stellt ein Gradient oder eine Diskontinuität im räumlichen Plasmafluß dar, die z.B. bei einer Supernova-Explosion durch eine Stoßwelle gegeben ist. Die Energie der kosmischen Strahlen ist dabei so groß, daß der Gyrationradius die Dicke dieser Stoßwelle bei weitem übersteigt, so daß man von einer verschwindenden Ausdehnung sprechen kann. Außerdem betrachten wir Systeme, in denen die dynamischen Eigenschaften nicht durch das Magnetfeld bestimmt werden. Die Eigenschaften einer solchen Stoßfront sind dann ausschließlich durch das Verhältnis der Plasmadichte vom Oberlauf zum Unterlauf gegeben.

Wir wählen ein Bezugssystem, in dem die Stoßfront ruht, und in der das Plasma parallel zur Stoßnormalen fließt. Ausgehend vom System, in der das Oberlauf-Plasma ruht (Oberlauf-Ruhsystem ORF, siehe Abb. 3.1a), wird dies erreicht durch eine Transformation entlang der Stoßnormalen mit der Stoßgeschwindigkeit u_s . Man erhält so das parallele Stoßsystem (PSS, siehe Abb. 3.2b). Die Bedingung der Stetigkeit des Massen-, Energie- und Impulsstroms kann mit Hilfe der Abkürzung $[X] \equiv X - X'$ für die Differenz einer Größe im Oberlauf (X) zum Unterlauf (X') geschrieben werden (Landau & Lifschitz 1991):

$$[\rho \check{u}] = 0, \quad (3.3)$$

$$[\check{u}^2/2 + w] = 0, \quad (3.4)$$

$$[p_g + \rho\check{u}^2] = 0, \quad (3.5)$$

wobei \check{u} die Plasmageschwindigkeit, w die Enthalpie, ρ die Dichte und p_g der Druck des Gases ist. Das Kompressionsverhältnis r des Stoßes ist nun mit den Plasmageschwindigkeiten durch die Kontinuitätsgleichung (3.3) auf einfache Weise verknüpft:

$$r := \frac{\rho'}{\rho} = \frac{\check{u}}{\check{u}'}. \quad (3.6)$$

Durch Berücksichtigen der Erhaltungssätze (3.4) und (3.5) kommt man zu einem Ausdruck für das Kompressionsverhältnis der Form

$$r = \frac{\check{u}}{\check{u}'} = \frac{\gamma + 1}{(\gamma - 1) + 2/M^2}, \quad (3.7)$$

wobei $\gamma = c_p/c_V$ das Verhältnis der Wärmekapazitäten und $M = \check{u}/c_s = u_s/c_s$ die Machzahl des Stoßes ist (c_s = Schallgeschwindigkeit im Oberlauf-Plasma). Im Grenzfall sehr starker Stoßfronten, d.h. $M \gg 1$, erhält man für ein einatomiges Gas mit $\gamma = 5/3$ das Kompressionsverhältnis $r = 4$.

3.1.1 Diffusive Beschleunigung

Die Beschreibung des Prozesses, bei dem Teilchen durch diffusive Bewegung in einem Medium von Streuzentren Energie gewinnen können, geht auf ein Modell von Fermi (1949) zurück, in dem zunächst die Streuung von Teilchen an stochastisch bewegten magnetischen Spiegeln beschrieben wurde. Da die Teilchen hierbei Stöße sowohl mit entgegenkommenden als auch sich entfernenden Streuzentren erfahren, mitteln sich die Energiegewinne in erster Ordnung der Geschwindigkeit der Streuzentren gerade weg, und es bleibt ein relativer Energiegewinn proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit. Daher wird dieser Prozeß Fermi-Beschleunigung 2. Ordnung genannt. Die Bewegung über eine Stoßfront stellt nun eine etwas andere Situation dar. Bei der Pitchwinkelstreuung im Unterlauf oder Oberlauf ist die Energie (bzw. der Impuls: $p = E/c$) der Teilchen zunächst erhalten. Kreuzt ein Teilchen die Stoßfront, so führt eine Lorentz-Transformation mit der Differenzgeschwindigkeit der beiden Systeme zu einer Erhöhung des Impulses, da in beiden möglichen Richtungen dieser Kreuzung die Komponente des Impulses entlang der Stoßnormalen *antiparallel* zur Transformationsrichtung ist (siehe Abb. 3.1a und 3.1b). Gemäß dieser mikroskopischen Behandlung der Teilchenbewegung konnte Bell (1978) zeigen, daß der mittlere Impulsgehalt der Teilchen bei

einem Zyklus proportional zur Differenzgeschwindigkeit der Plasmen und damit von 1. Ordnung ist:

$$\frac{\langle \Delta p \rangle}{p} = \frac{4}{3} \frac{\Delta u}{c}. \quad (3.8)$$

Das Ergebnis, daß der relative Impulsgewinn vom Impuls selbst unabhängig ist, führt zusammen mit der Tatsache, daß der Impuls unabhängig von der Entweichwahrscheinlichkeit ist, direkt zu einem Potenzgesetz für die Impulsverteilung. Sei P_{esc} die Entweichwahrscheinlichkeit, so ist die Anzahl der Teilchen mit einem Impuls p oder höher nach k Beschleunigungsprozessen gegeben durch

$$\int_p^\infty dp' n(p') = n_0 (1 - P_{\text{esc}})^k, \quad (3.9)$$

während der Impuls proportional zu der k -ten Potenz des Verstärkungskoeffizienten ist:

$$p = \left(1 + \frac{\langle \Delta p \rangle}{p} \right)^k p_0. \quad (3.10)$$

Eliminieren von k führt auf

$$n(p) \propto p^{-1 + \ln(1 - P_{\text{esc}}) / \ln(1 + \langle \Delta p \rangle / p)} \simeq p^{-1 - p P_{\text{esc}} / \langle \Delta p \rangle}, \quad (3.11)$$

für $p > p_0$. Wir erhalten somit ein Potenzgesetz, dessen Index von der Entweichwahrscheinlichkeit und dem mittleren Impulsgewinn bei einem Zyklus von zwei Stoßkreuzungen abhängt.

Der mikroskopische Zugang ermöglicht einen sehr guten Einblick in die Prozesse, die zur Beschleunigung führen. Durch die Benutzung der in Kapitel 1.1.2 angegebenen Transportgleichungen soll im folgenden eine Lösung unter sehr allgemeinen Randbedingungen angegeben werden. Wir betrachten dazu einen Stoß im PS-System (siehe Abb. 3.2b). Das Plasma fließt im Oberlauf mit \check{u} in negative x -Richtung und im Unterlauf mit \check{u}' , wobei die Ableitung an der Stoßfront (bei $x = 0$) durch $\partial u / \partial x = (\check{u}' - \check{u})\delta(x)$ gegeben ist. Die Transportgleichung für eine stationäre Verteilung lautet gemäß Gl. (1.27)

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left\{ [\check{u} H(x) + \check{u}' H(-x)] n \right\} + \frac{\partial}{\partial x} F + \frac{1}{3} (\check{u} - \check{u}')\delta(x) \frac{\partial}{\partial p} (p n) = 0, \quad (3.12)$$

wobei $H(x)$ die Heaviside-Funktion bezeichnet (siehe Gl. 2.54). Integrieren wir die Gleichung (3.12) über x von $-\infty$ bis ∞ , so erhalten wir Terme der Form $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} n(\pm\epsilon, p) \equiv n_{\pm}(0, p)$. Wir stellen jedoch fest, daß wir zur Herleitung der Gl. (1.27) eine in erster Näherung in μ isotrope Verteilung angenommen haben. Wie wir sehen werden ist unter dieser Annahme die Dichte $n(x, p)$ bei $x = 0$

stetig (siehe Gl. 3.67)². Demnach können wir schreiben $n_{\pm}(0, p) = n(0, p)$. Für $x \rightarrow \infty$ muß die Dichte verschwinden, da keine Teilchen aus dieser Richtung einströmen. Außerdem muß der Diffusionsstrom weit weg von der Stoßfront verschwinden $F(-\infty) = 0 = F(\infty)$, da hier keine Gradienten der Dichte vorhanden sein können. Die Integration der Gl. (3.12) liefert nun

$$\check{u}' n(-\infty, p) + \frac{1}{3} (\check{u} - \check{u}') \frac{\partial}{\partial p} p n(0, p) = 0. \quad (3.13)$$

Wir machen den Ansatz

$$n(x, p) = n(x) p^{2-s} \quad (3.14)$$

und finden mit $r = \check{u}/\check{u}'$ (Gl. 3.6)

$$s = 3 \left(1 + \frac{n(-\infty)}{n(0)} \frac{1}{r-1} \right). \quad (3.15)$$

Für diffusive Teilchenbewegung und Injektion bei $x = 0$ ist die Dichte in Richtung der Plasma-Konvektionsströmung konstant, d.h. $n(0) = n(-\infty)$ (siehe Gl. 3.43). Daher erhalten wir das bekannte Ergebnis $s = 3r/(r-1)$, was für einen starken Stoß mit Machzahl $M \gg 1$ und damit $r = 4$ auf den Spektralindex $s = 4$ führt (Axford et al. 1977; Krymskii 1977; Blandford & Ostriker 1978).

3.1.2 Stoß-Drift-Beschleunigung

Solange Teilchen keiner Pitchwinkelstreuung unterliegen, bzw. zwischen zwei solchen Streuprozessen, ist die Bewegung der Teilchen im Phasenraum vollständig deterministisch und wird bestimmt durch die ständige Wechselwirkung der Teilchen mit den äußeren elektromagnetischen Feldern. Betrachten wir zunächst ein Bezugssystem, in dem das Hintergrundplasma und damit das Magnetfeld ruht. Die bewegte Stoßfront stellt nun eine Grenze dar, auf der sich das Magnetfeld zeitlich verändert, was nach den Maxwell-Gleichungen ein elektrisches Feld zur Folge hat. Dieses elektrische Feld ist nun in der Lage, ein geladenes Teilchen zu beschleunigen. Es ist jedoch möglich, ein Teilchen nacheinander in Koordinatensystemen zu beschreiben, in denen das elektrische Feld am Ort des Teilchens verschwindet. Dadurch wird der Beschleunigungsvorgang weniger offensichtlich, aber mathematisch einfacher zu beschreiben.

Betrachten wir nun ein stochastisches Magnetfeld bei hauptsächlich senkrechter Stoßfront. Wir nehmen an, daß die Fluktuationen des Magnetfeldes, die die Bewegung des Gyrationenzentrums der Teilchen bestimmen, von solcher Größe

²Für eine isotrope Verteilung gilt $\bar{n}_r = n_t$.

sind, daß wir das Feld für die Strecke, die das Teilchen benötigt, um über die Stoßfront zu gelangen, als homogen betrachten können. Das bedeutet, wir haben bei jeder Stoßkreuzung im Prinzip eine Stoßfront mit großem Neigungswinkel $\phi \simeq 90^\circ$ zu betrachten. Bei dieser Konstellation werden Teilchen, die mit der nicht-relativistischen Stoßfront in Wechselwirkung treten, in jedem Falle mehrere Gyrationsumläufe durchführen, bevor sie transmittiert oder reflektiert werden. Dies bedeutet, daß sich das Magnetfeld, an das die Teilchen gebunden sind, im Vergleich zur Gyrationzeit, nur *langsam* ändert und daß wir über die Gyrophase integrierte Größen verwenden können. In diesem Falle bleibt der von der Teilchenbahn eingeschlossene Fluß konstant: $B\pi a = \text{const}$, wobei a der Gyrationradius ist (Jackson 1983). Ausgedrückt durch den Impuls p_\perp senkrecht zum Magnetfeld bedeutet dies

$$\frac{p_\perp^2}{B} = \text{const} . \quad (3.16)$$

Diese Gleichung drückt die Erhaltung der adiabatischen Invariante aus, was (z.B.) von Webb et al. (1983) und Decker (1988) für schräge kollisionsfreie Stoßfronten im Detail untersucht und bestätigt wurde.

Koordinatentransformationen bei Stoßkreuzungen

Wir haben im weiteren zwischen zwei Stoßkonstellationen zu unterscheiden. Sei ϕ der Winkel zwischen der Stoßnormalen und der Magnetfeldrichtung und u_s die Stoßgeschwindigkeit im ORS, so ist die Geschwindigkeit des Schnittpunktes der Stoßfront auf der Oberlauf-Magnetfeldlinie gegeben durch

$$v_{\text{int}} = \frac{u_s}{\cos \phi} . \quad (3.17)$$

Ist diese Geschwindigkeit kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ($c = 1$), so ist es möglich in ein spezielles Koordinatensystem zu transformieren, das zuerst von de Hoffmann & Teller (1950) benutzt wurde. In diesem Fall sprechen wir von einer ‘subluminalen’ Stoßfront, während der Fall $v_{\text{int}} > 1$ ‘superluminale’ Stoßfront genannt wird.

‘Subluminale’ Stoßfronten ($v_{\text{int}} < 1$)

Bei einer Transformation mit der Geschwindigkeit v_{int} entlang des Oberlauf-Magnetfeldes erhält man ein Koordinatensystem bei, der die Stoßfront in Ruhe ist. Dieses Koordinatensystem wird de Hoffmann-Teller System genannt (dHTS, vgl. Abb. 3.2a). Das Oberlauf-Plasma fließt mit der Geschwindigkeit $\tilde{u} = v_{\text{int}}$ entlang des Magnetfeldes. Dies bedeutet, daß im Oberlauf des dHT-Systems das

elektrische Feld verschwinden muß. Dies ließe im Prinzip ein elektrisches Feld im Unterlauf senkrecht zum Stoß zu. (Die Komponente des elektrischen Feldes parallel zur Stoßfront ist kontinuierlich und verschwindet daher). Da jedoch Plasma die Stoßfront überquert, hat das Magnetfeld eine Komponente senkrecht zum Stoß. Dies würde bedeuten, daß $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \neq 0$, was bei einem Plasma unendlicher Leitfähigkeit nicht möglich ist. Daher verschwindet das elektrische Feld auch im Unterlauf, und das Plasma fließt auch hier entlang des Magnetfeldes (siehe auch Kirk et al. 1994). Das Kompressionsverhältnis r im dHTS ist gegeben durch das Verhältnis der x -Komponenten³ der Dreier-Geschwindigkeiten vom Oberlauf zum Unterlauf. Da im dHTS kein elektrisches Feld vorhanden ist, bleibt der Impuls der Teilchen bei der Stoßkreuzung erhalten (d.h. $\tilde{p} = \tilde{p}'$). Die Erhaltung der adiabatischen Invarianten (Gl. 3.16) liefert daher

$$\frac{1 - \tilde{\mu}^2}{\tilde{B}} = \frac{1 - (\tilde{\mu}')^2}{\tilde{B}'}. \quad (3.18)$$

Für die Berechnung des Pitchwinkels bei einer Stoßkreuzung benötigen wir das Verhältnis der Magnetfeldstärken \tilde{B}'/\tilde{B} im dHTS. Dies ist gegeben durch (siehe Kirk & Heavens 1989, oder Naito & Takahara 1995)⁴

$$r_b := \frac{\tilde{B}'}{\tilde{B}} = \sqrt{1 + (r^2 - 1)\gamma_s^2 \sin^2 \phi}, \quad (3.19)$$

wobei $\gamma_s = 1/\sqrt{1 - u_s^2}$ der Gamma-Faktor des Stoßes gemessen im ORS ist, und ϕ der Neigungswinkel des Oberlauf-Magnetfeldes ebenfalls gemessen im ORS ist. Für einen Übergang vom Unterlauf zum Oberlauf benötigen wir den Neigungswinkel des Unterlauf-Magnetfeldes ϕ' zur Berechnung der Transformationsgeschwindigkeit entsprechend Gl. (3.17):

$$v \Big|_{\text{URS} \rightarrow \text{dHTS}} \equiv \bar{v}_{\text{int}} = \frac{\bar{u}_s}{\cos \phi'}. \quad (3.20)$$

Es gilt nun

$$\bar{u}_s = \frac{u_s}{r} \quad \text{und} \quad \frac{\cos \phi}{\cos \phi'} = \frac{\tilde{B}'}{\tilde{B}} = r_b. \quad (3.21)$$

Die erste Beziehung folgt aus der Definition von r gemäß Gl. (3.7) mit $\check{u} = u_s$ und $\check{u}' = \bar{u}_s$. Die zweite Beziehung ergibt sich unter Berücksichtigung, daß die Komponente des Magnetfeldes senkrecht zum Stoß im Oberlauf und Unterlauf identisch ist. Außerdem gilt $B = \tilde{B}$ und $B' = \tilde{B}'$, da diese Felder jeweils durch

³Bei einer Transformation vom PSS, in dem r zunächst definiert wurde, in das dHTS, hat man entlang der Stoßebene zu transformieren. Das Verhältnis der x -Komponenten der Dreier-Geschwindigkeiten ändert sich dabei nicht.

⁴ $r_b \equiv 1/b$ bei K&H (1989); bzw. $r_b \equiv b$ bei N&T (1995).

eine Transformation in Feldrichtung verknüpft sind. Mit Gl. (3.19) folgt dann der zweite Teil. Wir erhalten schließlich

$$v \Big|_{\text{URS} \rightarrow \text{dHTS}} = \frac{r_b}{r} \frac{u_s}{\cos \phi}. \quad (3.22)$$

Mit dieser Geschwindigkeit müssen der Impuls und der Pitchwinkel beim Übergang vom URS in das dHTS Lorentz-transformiert werden. Die Transformationsgeschwindigkeit vom ORS in das dHTS wurde oben schon angegeben:

$$v \Big|_{\text{ORS} \rightarrow \text{dHTS}} = \frac{u_s}{\cos \phi}. \quad (3.23)$$

Die inversen Transformationen unterscheiden sich nur um das Vorzeichen:

$$v \Big|_{\text{dHTS} \rightarrow \text{ORS}} = -\frac{u_s}{\cos \phi}, \quad (3.24)$$

$$v \Big|_{\text{dHTS} \rightarrow \text{URS}} = -\frac{r_b}{r} \frac{u_s}{\cos \phi}. \quad (3.25)$$

Innerhalb des dHT-Systems ist der Impuls konstant, und der Pitchwinkel ändert sich gemäß Gl. (3.18). Bei dem Übergang vom Oberlauf in den Unterlauf hat man dabei zu berechnen

$$\tilde{\mu}' = \pm \sqrt{1 - r_b(1 - \tilde{\mu}^2)}. \quad (3.26)$$

Für

$$|\tilde{\mu}| < \sqrt{1 - r_b^{-1}} \quad (3.27)$$

gibt es keine reelle Lösung für den Unterlauf-Pitchwinkel $\tilde{\mu}'$. Dies bedeutet, daß das Teilchen reflektiert wird; denn um den Fluß durch die Umlauffläche bei der Stoßüberquerung konstant zu halten, müssen die Teilchen gemäß Gl. (3.16) ihren Impuls p_{\perp} vergrößern. Teilchen, die die Bedingung (3.27) erfüllen, haben nicht genügend Translationsenergie die dazu in Rotationsenergie umgesetzt werden kann. Dieser Effekt ist von der sog. magnetischen Flasche bekannt. Unter diesen Bedingungen wird ein Teilchen gemäß Gl. (3.23) in das dHTS transformiert und nach Invertierung des Pitchwinkels ($\mu \rightarrow -\mu$) gemäß Gl. (3.24) wieder in das ORS zurück transformiert. Da beide Lorentz-Transformationen entgegen der Bewegungsrichtung der Teilchen ausgeführt werden, erkennt man, daß sie bei diesem Ereignis immer Energie gewinnen werden. Tatsächlich ist daher die Reflexion der effektivste Beschleunigungsprozeß bei 'subluminalen' Stoßfronten.

'Superluminale' Stoßfronten ($v_{\text{int}} > 1$)

In dem Fall, daß die Geschwindigkeit des Schnittpunktes der Stoßfront mit der Magnetfeldlinie mit Überlichtgeschwindigkeit fortschreitet ($v_{\text{int}} > 1$), sind die

oben beschriebenen Transformationen nicht anwendbar. Es ist jedoch möglich, in spezielle Koordinatensysteme zu transformieren, in dem das elektrische Feld entweder im Oberlauf oder im Unterlauf verschwindet. In diesen Systemen ist das Magnetfeld senkrecht zur Stoßnormalen (vgl. Abb. 3.3). Diese Transformation ist bei ‘superluminalen’ Stoßfronten immer möglich, und wir können diese daher mit den senkrechten Stoßfronten identifizieren (siehe z.B. Schatzman 1963). Bei dieser Konstellation können Teilchen ausschließlich vom Oberlauf ausgehend den Stoß überqueren. Betrachten wir wieder die Geschwindigkeit des Schnittpunktes im ORS (Gl. 3.17). Man kann nun eine Lorentz-Transformation mit der Geschwindigkeit v_t entlang der Oberlauf-Magnetfeldlinie durchführen, so daß die Geschwindigkeit des Schnittpunktes unendlich wird, was einer senkrechten Stoßfront gleichkommt:

$$v_{\text{int}}^* = \frac{v_t - u_s / \cos \phi}{1 - v_t u_s / \cos \phi} \stackrel{!}{=} \infty. \quad (3.28)$$

Die entsprechende Transformationsgeschwindigkeit ist gegeben durch

$$v \Big|_{\text{ORS} \rightarrow \text{ODS}} = v_t = \frac{\cos \phi}{u_s}, \quad (3.29)$$

mit $|v_t| < 1$. Dies ist gleichzeitig die Transformationsgeschwindigkeit vom ORS in das Oberlauf-Driftsystem (ODS, vgl. Abb. 3.3a), in welchem das Plasma im Oberlauf entlang des ruhenden Magnetfeldes fließt, während es im Unterlauf eine Drift-Bewegung senkrecht zum bewegten Magnetfeld durchführt, die durch ein elektrisches Feld verursacht wird. Ausgehend vom URS können wir eine zu Gl. (3.28) entsprechende Bedingung für die Transformation in das Unterlauf-Driftsystem (UDS, vgl. Abb. 3.3b) angeben:

$$\bar{v}_{\text{int}}^* = \frac{\bar{v}_t - \bar{u}_s / \cos \bar{\phi}'}{1 - \bar{v}_t \bar{u}_s / \cos \bar{\phi}'} \stackrel{!}{=} \infty. \quad (3.30)$$

Dies führt unter Beachtung von Gl. (3.21) auf

$$v \Big|_{\text{UDS} \rightarrow \text{URS}} = -\bar{v}_t = -\frac{r}{r_b} \frac{\cos \phi}{u_s}. \quad (3.31)$$

Es bleiben nun noch Beziehungen anzugeben, die den Impuls und den Pitchwinkel im ODS und UDS verknüpfen. Wir fordern wieder die Erhaltung der adiabatischen Invarianten, jedoch ist nun die zum Magnetfeld senkrechte Komponente des Impulses beim Übergang über die Stoßfront nicht mehr konstant. Die zum Magnetfeld parallele Komponente bleibt wieder erhalten, da in dieser Richtung kein elektrisches Feld wirken kann ($\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$, s.o.). Dies bedeutet (Begelman & Kirk 1990)

$$\frac{(\hat{p}_\perp)^2}{\hat{B}} = \frac{(\check{p}'_\perp)^2}{\check{B}'}, \quad (3.32)$$

$$\hat{p}_\parallel = \check{p}'_\parallel. \quad (3.33)$$

Unter Benutzung von Gl. (3.21)⁵ und $\hat{p}_\perp = \hat{p} \sqrt{1 - \hat{\mu}^2}$ sowie $\hat{p}_\parallel = \hat{p} \hat{\mu}$ können wir damit den Pitchwinkel und Impuls beim Übergang vom ODS in das UDS angeben:

$$\check{\mu}' = \frac{\hat{\mu}}{\sqrt{r_b(1 - \hat{\mu}^2) + \hat{\mu}^2}}, \quad (3.34)$$

$$\check{p}' = \frac{\hat{\mu}}{\check{\mu}'} \hat{p}. \quad (3.35)$$

Damit sind alle Komponenten der einzig benötigten Transformation (ORS \rightarrow ODS \rightarrow UDS \rightarrow URS) im Falle von ‘superluminalen’ Stoßfronten angegeben.

⁵Da die Feldstärken in den Driftsystemen aus denen in den entsprechenden Ruhesystemen durch Transformation entlang der Feldlinien hervorgehen, gilt: $\hat{B} = B$ und $\check{B}' = \bar{B}'$.

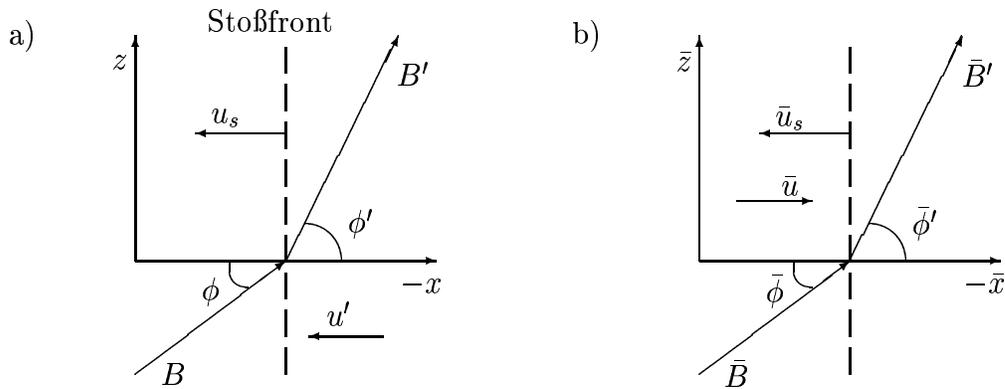


Abbildung 3.1: Definition der Koordinaten für das (a) Oberlauf-Ruhsystem (ORS) und (b) Unterlauf-Ruhsystem (URS).

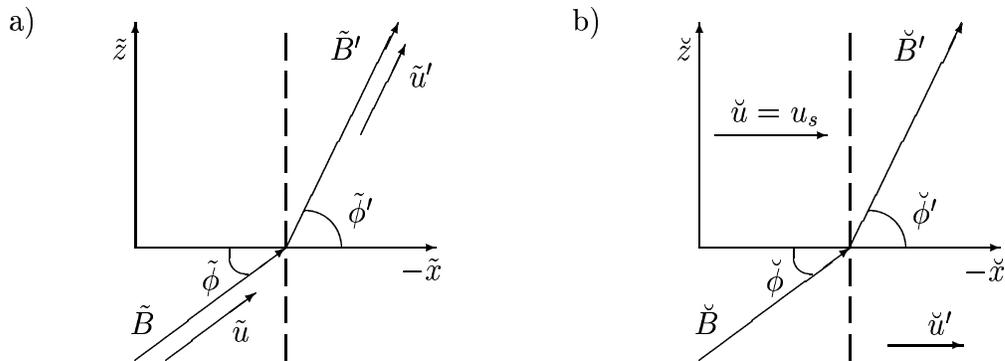


Abbildung 3.2: Definition der Koordinaten für das (a) de Hoffmann-Teller-System (dHTS) und (b) parallele Stoßsystem (PSS).

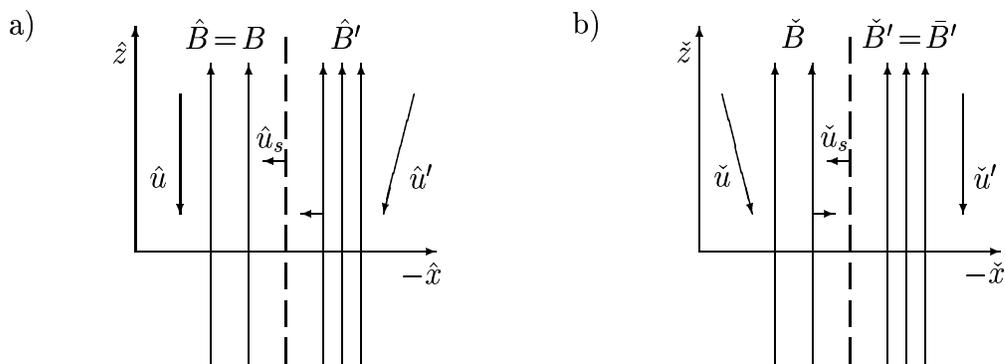


Abbildung 3.3: Definition der Koordinaten für das (a) Oberlauf-Driftsystem (ODS) und (b) Unterlauf-Driftsystem (UDS).

3.2 Beschleunigung bei anomalem Transport

Für die Teilchenbewegung in einem stochastischen Magnetfeld existieren verschiedene Bereiche, die abhängig von der Zeitskala der Bewegung sind. Für große Zeitskalen, wie sie beim Transport der kosmischen Strahlen in der Galaxie von Bedeutung sind, erreichen die Teilchen Bereiche des Magnetfeldes, die von dem ursprünglichen Bereich dekorreliert sind (Chuvilgin & Ptuskin 1993). Die Eigenschaften des Transportes lassen sich dann als zusammengesetzt aus der anfänglichen *sub*-diffusiven und späteren diffusiven Bewegung beschreiben (sog. „compound diffusion“). Für den Beschleunigungsprozeß bei Supernova-Überresten wurde von Dendy et al. (1995) abgeschätzt, daß hier der Bereich der in Kap. 1.2 beschriebenen *sub*-Diffusion mit $\alpha = 1/2$ von Bedeutung ist. Die Zeitskala für die Beschleunigung unter diesen Bedingungen ist bei konstantem D_M und κ_{\parallel} gegeben durch (Duffy et al. 1995)

$$\tau_{\text{acc}} = \frac{3D_M^{2/3} \kappa_{\parallel}^{1/3}}{\check{u} - \check{u}'} \left(\frac{1}{\check{u}^{1/3}} + \frac{1}{(\check{u}')^{1/3}} \right). \quad (3.36)$$

Numerische Berechnungen von Kirk et al. (1996) für zusammengesetzten Transport haben explizit gezeigt, daß die Auswirkungen des *sub*-diffusiven Teilchentransportes auf das Impulsspektrum von großer Bedeutung sind, wenn die Dekorrelationszeit von Teilchen und Magnetfeld größer als einige Zeiteinheiten ist:

$$\tau_d \gtrsim \left(\frac{D_M^2 \kappa_{\parallel}}{(\check{u}')^4} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (3.37)$$

Da die dimensionslose Zeit auf der rechten Seite gerade in etwa der Beschleunigungszeit entspricht, wird das für die Teilchenbeschleunigung relevante Transportverhalten durch *sub*-Diffusion bestimmt, wenn $\tau_d \gtrsim \tau_{\text{acc}}$ gegeben ist.

Es wird nun der Einfluß der in Kapitel 1.2 dargestellten Transporteigenschaften von stochastischen Magnetfeldern auf die räumliche Verteilung von Teilchen beschrieben, die an diese Magnetfelder gebunden sind. Diese Verteilung wiederum hat gemäß Gl. (3.15) einen Einfluß auf das Spektrum der beschleunigten Teilchen. Im folgenden soll nun unter Verwendung des Teilchenpropagators für *sub*-diffusiven Transport (Gl. 1.44) die eindimensionale räumliche Verteilung berechnet werden. Sei $Q(x, t)$ die Quellfunktion injizierter Teilchen, so stellt sich die Dichtefunktion $n(x, t)$ folgendermaßen dar (siehe Kirk et al. 1996)

$$n(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^t dt' P_{\text{sub}}(x - x', t - t') Q(x', t'). \quad (3.38)$$

Wir nehmen an, daß Teilchen für Zeiten $t > t_0$ mit konstanter Rate Q_0 an der Stoßfront injiziert werden. Die Stoßfront bewege sich mit der Geschwindigkeit u_s

in positive Richtung entlang der x -Achse. Das bedeutet

$$Q(x, t) = Q_0 \delta(x - u_s t) H(t - t_0), \quad (3.39)$$

wobei H die Heaviside-Funktion ist. Die asymptotische Gleichgewichtslösung wird erhalten durch $t_0 \rightarrow -\infty$. Gleichung (3.38) wird dann zu

$$n(x, t) = Q_0 \int_{-\infty}^t dt' P_{\text{sub}}(x - u_s t', t - t'). \quad (3.40)$$

Wir bezeichnen den Abstand von der Stoßfront mit $x_s(x, t) = x - u_s t$ und führen eine neue Integrationsvariable $\tau = t - t'$ ein. Damit erhalten wir für die Dichteverteilung

$$n(x_s) = Q_0 \int_0^{\infty} d\tau P_{\text{sub}}(x_s + u_s \tau, \tau). \quad (3.41)$$

Aus der Form des Propagators kann man die Dichte an ausgezeichneten Stellen ableiten (siehe Kirk et al. 1996). So folgt für die Dichte weit im Unterlauf $n(-\infty) = Q_0/u_s$, während die Dichte weit im Oberlauf verschwinden muß: $n(\infty) = 0$. An der Stelle der Injektion kann das Integral (3.41) ausgewertet werden. Man erhält $n(0) = 2Q_0/(3u_s)$. Das bedeutet für das Verhältnis der Dichten an der Stoßfront zu der weit im Unterlauf

$$\frac{n(0)}{n(-\infty)} = \frac{2}{3}. \quad (3.42)$$

Dieses Ergebnis unterscheidet sich von dem Dichteverhältnis, das man unter dem Einfluß einer Gauß-Funktion als Propagator (siehe Gl. 1.29) erhält. Damit ergibt sich

$$\left. \frac{n(0)}{n(-\infty)} \right|_{\text{diffusiv}} = 1, \quad (3.43)$$

d.h. die Dichte ist für diffusive Teilchenbewegung im Unterlauf konstant, wenn Teilchen fortwährend in der Stoßebene injiziert werden.

Die Gleichungen (3.42) und (3.43) ermöglichen nun eine Bestimmung des Spektralindex gemäß Gl. (3.15) und damit auf Grundlage der Transportgleichung (1.27). Die Voraussetzungen, die zu dieser Gleichung geführt haben, waren eine in erster Näherung vom Pitchwinkel unabhängige Verteilungsfunktion. Setzen wir Gl. (3.42) in Gl. (3.15) ein, so erhalten wir

$$s = \frac{3r}{r-1} \left(1 + \frac{1}{2r} \right). \quad (3.44)$$

Der Ausdruck in der Klammer stellt dabei quasi die Änderung gegenüber dem Spektralindex bei rein diffusiver Fermi-Beschleunigung 1. Ordnung dar, wie man sie z.B. für parallele Stoßfronten erhält. Für eine starke Stoßfront mit dem Kompressionsverhältnis $r = 4$ erhält man einen Index von 4.5 gegenüber 4.0 bei (nicht-relativistischer) diffusiver Beschleunigung. Dies hat seine Ursache darin, daß Teilchen bei *sub*-diffusivem Transport in Richtung senkrecht zur Stoßfront effektiver in Richtung Unterlauf und damit aus der Beschleunigungsregion herausgeführt werden. Dies findet explizit Ausdruck in der um $2/3$ reduzierten (gegenüber der weit im Unterlauf konstanten) Dichte an der Stelle der Injektion (Stoßfront). Man kann dies auf den „Gedächtnis“-Effekt der Teilchenbewegung zurückführen, der durch das Magnetfeld eingeführt wird. Bewegen sich Teilchen zunächst vom Ort der Injektion entlang der Magnetfeldlinie weg, so können sie sich (abgesehen von der Plasmaströmung) genau wie die Magnetfeldlinie gleichermaßen in Richtung Ober- und Unterlauf bewegen. Bewegen sich die Teilchen aber entlang der Feldlinie zu dem Ort der Injektion auf dieser zurück, so bedeutet das, daß sie in jedem Falle in Richtung Unterlauf geführt werden, da der Ort der Injektion sich mit dem Plasmastrom ausschließlich in Richtung Unterlauf bewegt. Dies dünnt die Dichte an der Injektionsstelle (Stoßfront) zusätzlich aus.

3.3 Monte-Carlo-Simulation

Teilchenbeschleunigung an Stoßfronten ist sehr oft der Gegenstand von Untersuchungen mit Hilfe von Computer-Simulationen. Der Grund liegt darin, daß analytische Ergebnisse nur unter speziellen Annahmen erhalten werden können. So sind z.B. die Ableitungen der Folgerungen aus Kapitel 3.1.1 unter der Annahme erfolgt, daß die Verteilungsfunktion selbst direkt an der Stoßfront durch einen isotropen Anteil dominiert wird. Weiterhin besteht die Möglichkeit, bei numerischen Methoden flexible Randbedingungen an die räumliche Verteilung oder die Energie der beschleunigten Teilchen zu stellen. Nichtlineare Effekte, die durch die Rückwirkung der beschleunigten Teilchen auf die Stoßfront entstehen, sind z.B. von Ellison et al. (1996) mit Hilfe der Monte-Carlo-Methode untersucht worden (siehe auch Drury 1983; Jones & Ellison 1991).

Bei einer Monte-Carlo-Simulation von anomalem Transport, wie er in den Kapiteln 1.2 und 3.2 beschrieben wurde, haben wir die Tatsache zu berücksichtigen, daß dieser inhärent *nicht*-Markovisch ist. Das bedeutet, daß es nicht ausreicht, eine Reihe von statistisch völlig unabhängigen Schritten zu betrachten. Der Grund dafür ist, daß Teilchen keiner räumlichen Diffusion unterliegen, solange sie an ein Magnetfeld gebunden sind. Entlang des Magnetfeldes wird die Bewegung zwar durch Streuungen mit zufälligem Charakter bestimmt, der Verlauf des Magnetfeldes führt aber ein „Gedächtnis“ ein und verhindert so die räumliche Diffusion.

Es soll nun zunächst eine Simulationsmethode beschrieben werden, die auf jeder Längenskala von der Form des Propagators (1.44) Gebrauch macht. Danach wird die in dieser Arbeit verwendete Methode dargestellt, bei der die Teilchenbewegung allein auf zufälligen Schritten endlicher Länge sowohl für das Magnetfeld als auch für die Bewegung entlang des Magnetfeldes beruht.

3.3.1 Die Propagator–Methode

Zur Simulation des *sub*-diffusiven Teilchentransportes kann man zunächst die Form des Propagators (1.44) explizit ausnutzen (Kirk et al. 1997; Gieseler et al. 1997). Das Magnetfeld habe seine Hauptkomponente in z -Richtung. Geht nun eine Magnetfeldlinie durch den Punkt $(x = x_0, z = z_0)$, so ist die Wahrscheinlichkeit, diese bei (x, z) zu finden, durch einen Gaußschen Propagator gegeben:

$$P(x, z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D_M |z - z_0|}} \exp \left[-(x - x_0)^2 / 4D_M |z - z_0| \right]. \quad (3.45)$$

Für ein Teilchen, das entlang des Feldes diffundiert und sich zur Zeit t bei (x_0, z_0) befindet, ist die Wahrscheinlichkeit, zur Zeit $t + \Delta t$ bei z zu sein, gegeben durch

$$P(z, \Delta t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi \kappa_{\parallel} \Delta t}} \exp \left[-(z - z_0)^2 / 4\kappa_{\parallel} \Delta t \right]. \quad (3.46)$$

Der erste Schritt dieser Monte–Carlo–Methode ist nun, zu gegebenem Δt ein z gemäß der Verteilung (3.46) zu finden. Das Ergebnis $z = z_1$ setzt man nun in Gl. (3.45) ein, um mit dieser Gleichung einen dazu gehörenden Wert für $x = x_1$ zu erhalten. Um tatsächlich *sub*-diffusiven Transport zu erreichen, dürfen die nachfolgenden Schritte nicht unabhängig sein. Jeder erreichte Punkt (x_0, z_0) und (x_1, z_1) muß gespeichert werden. Für den nächsten Schritt wird ein Wert z_2 gemäß Gl. (3.46) gewählt. Es gibt nun drei Möglichkeiten: $z_2 < \min(z_0, z_1)$, $z_2 > \max(z_0, z_1)$ oder z_2 liegt zwischen zwei bekannten Punkten der Feldlinie. Um das zu $z = z_2$ entsprechende $x = x_2$ zu finden, berechnen wir die Wahrscheinlichkeit, daß die Feldlinie durch (x_2, z_2) und auch durch schon bekannte benachbarte Punkte geht. In den ersten beiden Fällen wird dies erreicht durch Ersetzen von $|z - z_0|$ durch $z_2 - \max/\min(z_0, z_1)$ und $x - x_0$ durch den entsprechenden Wert. Wenn aber $z = z_2$ zwischen zwei bekannten Punkten der Feldlinie liegt (z.B. (x_0, z_0) und (x_1, z_1)), wird die bedingte Wahrscheinlichkeit für den Punkt x berechnet durch

$$P(x, z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D_M |z_{\text{bed}}|}} \exp \left[-(x - x_{\text{bed}})^2 / 4D_M |z_{\text{bed}}| \right], \quad (3.47)$$

wobei $z_{\text{bed}} = (z_1 - z)(z - z_0)/(z_1 - z_0)$ und $x_{\text{bed}} = [x_0(z_1 - z) + x_1(z - z_0)]/(z_1 - z_0)$. Das bedeutet, der Schwerpunkt dieser Verteilung liegt auf der Verbindungslinie

der schon bekannten Stützstellen, und die Breite nimmt mit wachsendem Abstand von diesen zu.⁶

Diese Methode ist geeignet, *sub*-diffusives Verhalten auf *jeder* Längenskala zu beschreiben und liefert daher exakt die räumliche Verteilung, wie sie in Kapitel 3.2 beschrieben wurde (Kirk et al. 1997). Sie hat jedoch ein prinzipielles Problem bei der Simulation von Beschleunigung, da die Anzahl der Kreuzungen einer gegebenen Oberfläche (Stoßfront) nicht eindeutig definiert ist. Die in Kapitel 3.1.2 dargestellten Prozesse lassen sich daher nicht implementieren. Außerdem ist die Anzahl der Simulationsschritte durch den Kernspeicher des Rechners begrenzt, da dieser für die Speicherung des ständig anwachsenden Feldes der Magnetfeldpunkte benötigt wird.

3.3.2 Die Zufallsschritt-Methode

Die im vorigen Kapitel beschriebenen Probleme lassen sich umgehen durch eine Simulationsmethode, die sowohl für das Magnetfeld als auch für die Teilchenbewegung zufällige Schritte endlicher Länge benutzt. Das Magnetfeld wird dabei beschrieben durch eine sehr große Anzahl⁷ von Stützstellen entlang der Hauptrichtung z (siehe Abb. 3.4). Zu jeder dieser Gitterstellen wird ein Wert $\Delta x_{i,j}$ erzeugt, der die Richtung des Magnetfeldes für zunehmendes z bestimmt. Dabei sei i die Identifikationsnummer der Magnetfeldlinie und j die Nummer der Stützstelle. Die Werte von $\Delta x_{i,j}$ entsprechen den Fluktuationen des magnetischen Feldes und sind zunächst gleichverteilt mit $\max(\Delta x_{i,j}) \propto \delta b$ (siehe Gl. 1.32). Zwischen den Stützstellen nehmen wir das Magnetfeld als gleichförmig an, so daß zu jedem Wert von z ein Wert von x durch lineare Interpolation gefunden werden kann. Darüber hinaus ist bei Verwendung eines speziellen Zufallszahlen-Generators, wie er für die Datenverschlüsselung benutzt wird (es wurde die Routine 'ran4' benutzt; siehe Press et al. 1992), nicht nötig diese Werte $\Delta x_{i,j}$ zu speichern, da sie zu einer numerierten Sequenz von Zufallszahlen gehören. Ist diese Sequenz durch die Zahl i einmal initialisiert, so kann zu jedem beliebigen Wert j das entsprechende $\Delta x_{i,j}$ abgerufen werden, ohne die Sequenz $\Delta x_{i,0} \dots \Delta x_{i,j-1}$ erzeugen zu müssen, wie es bei gewöhnlichen Zufallszahlen-Generatoren nötig wäre. Diese Beschreibung kommt daher einer Generierung und Speicherung des Magnetfeldes an den Stützstellen gleich, ohne jedoch den entsprechenden Kernspeicher zu belegen.

Diese Methode simuliert zunächst Teilchen, die immer an eine bestimmte Feldlinie gebunden sind. Anders ausgedrückt heißt das, daß zu jeder Teilchenposition in z (bei ruhendem Plasma, z.B. im Oberlauf) genau eine Position x

⁶Dieser Formalismus ist angelehnt an die quantenmechanische Beschreibung von Trajektorien durch den Pfadintegral-Formalismus (siehe z.B. Feynman & Hibbs 1965).

⁷Diese ist nur begrenzt durch die Periode des verwendeten Zufallszahlen-Generators.

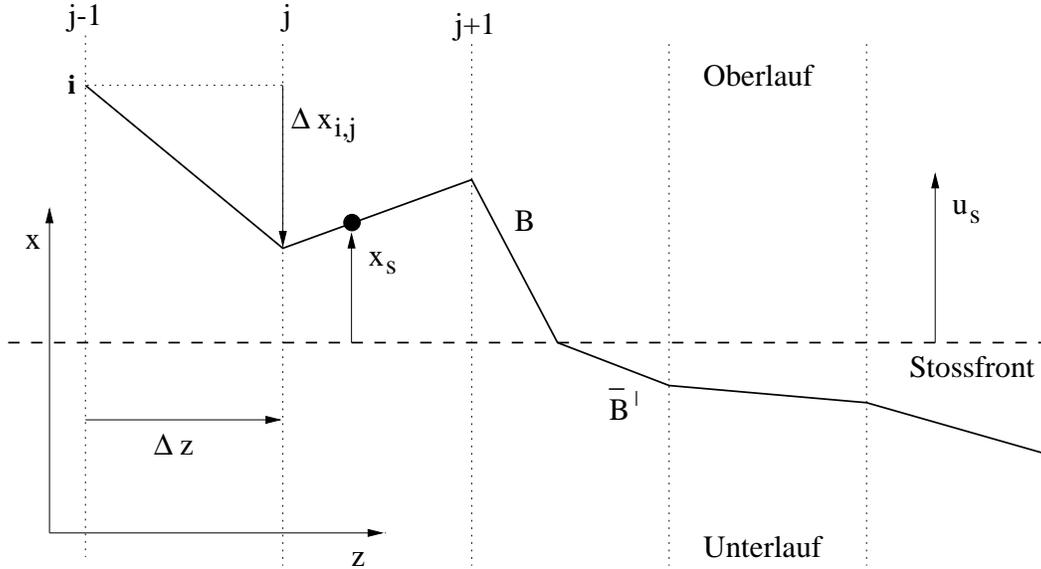


Abbildung 3.4: Darstellung des stochastischen Magnetfeldes durch lineare Näherung auf der Länge Δz . Der Abstand eines Teilchens von der Stoßfront beträgt x_s . (Vergleiche Abb. 3.1). Die Magnetfeldlinie ist durch die Nummer i identifiziert, während die Stützpunkte durch j gekennzeichnet sind.

möglich ist. Einerseits ist es interessant den Teilchentransport in diesem Grenzfall zu studieren, der zu *sub*-Diffusion führt, andererseits können Teilchen bei $\kappa_{\perp} \neq 0$ von ihrer ursprünglichen Feldlinie dekorreliert werden (siehe Rechester & Rosenbluth 1978). Durch die Benutzung der *Änderung* der x -Koordinate beim Übergang von einer Stützstelle zur nächsten, ist es aber sehr leicht möglich, eine Dekorrelation von einer Magnetfeldlinie zu berücksichtigen. Dazu kann man jedem Wert $\Delta x_{i,j}$ eine kleine von z unabhängige Komponente δx beimischen: $\Delta x_{i,j} \rightarrow \Delta x_{i,j}(1 - \epsilon) + \delta x \epsilon$, mit $\epsilon \in [0, 1]$. Während für $\epsilon = 0$ ein Teilchen strikt an eine Feldlinie gebunden ist (vgl. Gl. 1.34), gilt dies für $\epsilon = 1$ nur auf der Skala Δz .

Die Diffusion der Teilchen entlang des Magnetfeldes wird ebenfalls in diskrete Schritte zerlegt. Das Gyrationzentrum eines Teilchens bewege sich dabei während der mittleren Pitchwinkelstreuzeit Δt ungestört entlang des Magnetfeldes. Nach jedem dieser Zeitschritte erfährt der Pitchwinkel eine kleine zufällige Änderung. Auf diese Weise ist die Trajektorie des Gyrationzentrums des Teilchens zu jedem Zeitpunkt definiert. Dasselbe gilt natürlich für den Ort der Stoßfront, da diese sich mit wohldefinierter Geschwindigkeit fortbewegt (u_s , bzw. \bar{u}_s). Dadurch ist es möglich, den Zeitpunkt der Stoßkreuzung zu bestimmen und den Einfluß der adiabatischen Invarianten gemäß Kapitel 3.1.2 zu berücksichtigen.

Es wird nun noch ein Parameter benötigt, der die Skala definiert, auf der das

Magnetfeld durch eine lineare Näherung beschrieben werden kann. Dieser verknüpft das Element Δz mit einer physikalischen Länge. Dazu betrachten wir ein Teilchen, das sich mit Lichtgeschwindigkeit c bewegt. Dieses lege in der Streuzzeit Δt einen Weg $n_{\max}\Delta z$ zurück, d.h. $c\Delta t = n_{\max}\Delta z$. Das bedeutet, dieses Teilchen kann während seiner freien Flugzeit Δt maximal $n_{\max} \in \mathfrak{R}^{>0}$ lineare Abschnitte des Magnetfeldes überstreichen.

Das Transportverhalten von Teilchen, die an eine Magnetfeldlinie gebunden sind, ist mit dem Parameter n_{\max} verknüpft. Insbesondere *sub*-diffusiver Transport zwischen zwei aufeinander folgenden Begegnungen eines Teilchens mit der Stoßfront ist nicht für jeden Wert von n_{\max} realisiert. Dazu muß ein Teilchen sowohl mehrere Pitchwinkelstreuungen durchführen (also mehrere Zeitintervalle Δt durchlaufen), als auch ein Magnetfeld überstreichen, das sich auf dieser Skala diffusiv verhält. Betrachten wir dazu zunächst $n_{\max} \ll 1$. In diesem Fall kann sich ein Teilchen für sehr viele Zeitintervalle auf ein und demselben linearen Magnetfeldabschnitt bewegen. Um nach einer Stoßbegegnung zur Stoßfront zurückzukehren, sind dann im Mittel mehrere Pitchwinkelstreuungen nötig, aber das dabei überstrichene Magnetfeld zeigt kein diffusives Verhalten. Für $n_{\max} \gg 1$ ist die Situation umgedreht. Zwar werden nun zwischen zwei Stoßbegegnungen mehrere lineare Abschnitte des Magnetfeldes überstrichen, jedoch kann dies während sehr kurzen Zeiten im Vergleich zu Δt geschehen, so daß eine Pitchwinkeldiffusion nicht mehr gegeben ist. Um *sub*-diffusiven Teilchentransport sicherzustellen, muß daher überprüft werden, ob tatsächlich im Mittel mehrere Pitchwinkelstreuungen und gleichzeitig mehrere Intervalle Δz zwischen einzelnen Stoßbegegnungen durchlaufen worden sind. Dies wird für Magnetfelder der Fall sein, die sich beschreiben lassen durch $n_{\max} \approx 1$.

Der logische Ablauf der Simulation läßt sich folgendermaßen zusammenfassen: Ein Teilchen wird mit einem zufälligen Pitchwinkel an einem beliebigen Schnittpunkt von Magnetfeldlinie und Stoßfront injiziert. Danach bewegt es sich zunächst ungestört auf dem momentanen linearen Abschnitt des Magnetfeldes. Es gibt nun drei Ereignisse, deren Eintreffen im weiteren Verlauf zu überprüfen ist:

1. Das Teilchen bewegt sich für die gesamte Zeit Δt auf demselben linearen Abschnitt des Magnetfeldes. In diesem Fall ist die Koordinate am Ende dieses Zeitabschnittes und ein neuer Pitchwinkel gemäß $\mu \rightarrow \mu + \delta\mu$ zu berechnen.
2. Innerhalb der Zeit Δt wird eine Stützstelle erreicht, an der sich die Magnetfeldrichtung ändert. Hier wird nun ein $\Delta x_{i,j\pm 1}$ zur Festlegung der anschließenden Feldrichtung generiert. Es ist hier zu beachten, daß der Betrag der Feldstärke von den Fluktuationen gemäß $|\mathbf{B}| = |\mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B}|$ abhängt. Dadurch ist bei einer Änderung von $\delta\mathbf{B}$, wie sie an den Stützstellen auftritt, der Pitchwinkel analog zu Gl. (3.18) zu berechnen.

3. Das Teilchen trifft die Stoßfront. Der Zeitpunkt und der Ort dieses Ereignisses ist eindeutig bestimmt, ebenso wie der Winkel, den das Magnetfeld mit der Stoßfront einschließt. Der Pitchwinkel und der Impuls des Teilchens kann nun gemäß Kapitel 3.1.2 berechnet werden. Das entsprechende Flußdiagramm ist in Abb. 3.5 dargestellt.

Es kann genau eines der Ereignisse (1) bis (3) eintreffen. Das bedeutet, das Teilchen erreicht als nächstes entweder das Ende seiner freien Flugstrecke oder einen Stützpunkt des Magnetfeldes oder die Stoßfront. Bei den Ereignissen (2) und (3) wird von der Pitchwinkelstreuzeit Δt die bis zum Eintreffen dieser Ereignisse verstrichene Zeit Δt_{zw} abgezogen und die Simulation für die Zeit $\Delta t \rightarrow \Delta t_{rest} = \Delta t - \Delta t_{zw}$ fortgesetzt. Die Simulation eines speziellen Teilchens ist im Prinzip beendet, wenn der Abstand $|x_s|$ von der Stoßfront im Unterlauf größer als ein vorgegebener Wert ist: $|x_s| > x_{max} > 0$. In diesem Fall wird die Simulation mit einer erneuten Injektion eines Teilchens auf einer verschiedenen Magnetfeldlinie fortgesetzt.⁸

⁸Dies kann so realisiert werden, daß selbst Teilchen, die sich beliebig weit vom Stoß entfernt haben, noch eine Möglichkeit haben zum Stoß zurückzukehren. Siehe dazu die Beschreibung auf Seite 91.

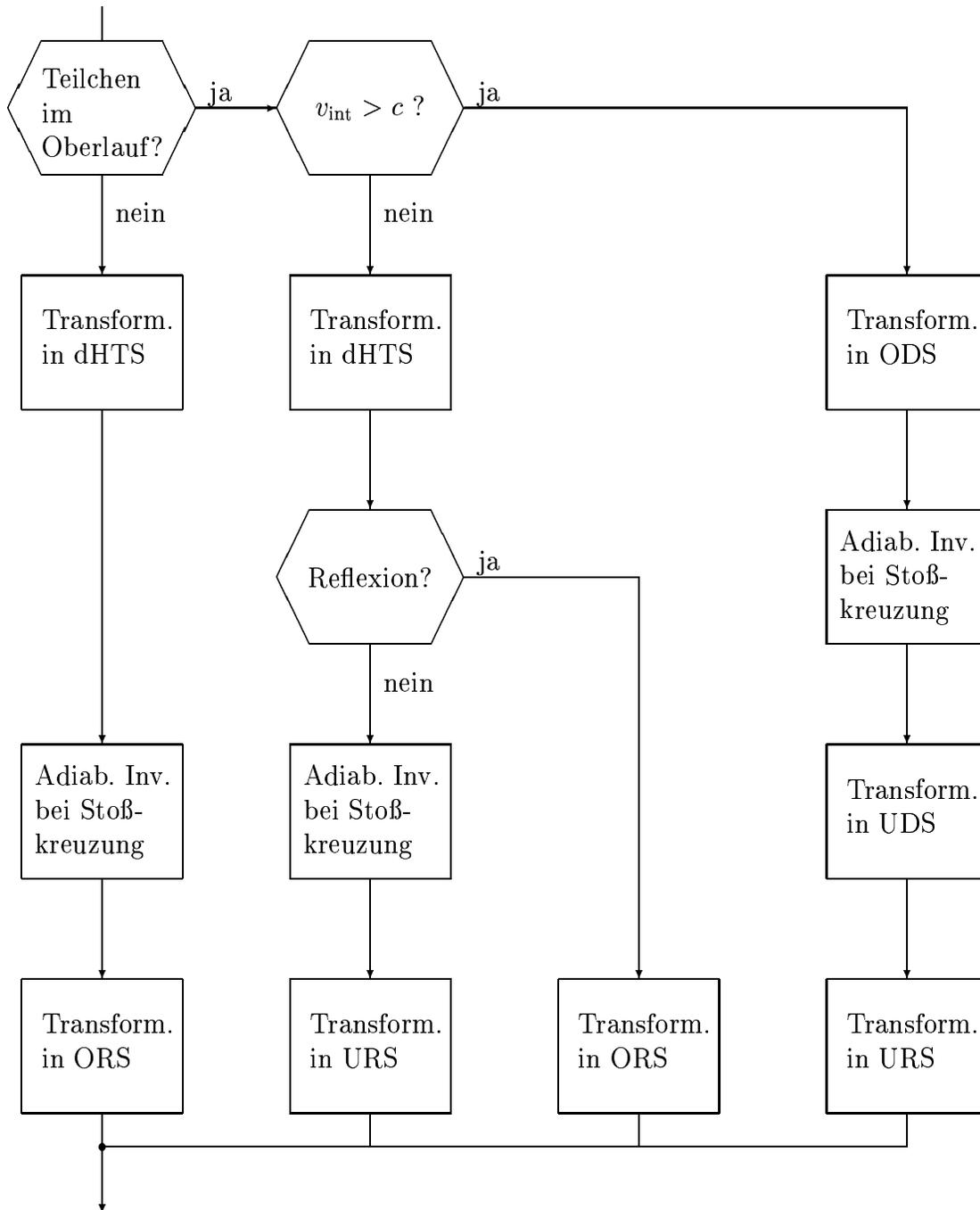


Abbildung 3.5: Flußdiagramm des Programms, welches durchlaufen wird, wenn ein Teilchen die Stoßfront trifft. Die einzelnen Berechnungen sind im Kapitel 3.1.2 beschrieben.

Die magnetische Diffusivität D_M

Es wurde durch die Annahme, daß die Fluktuationen $\delta\mathbf{b}(z) \equiv \delta\mathbf{B}(z)/|\mathbf{B}_0|$ des Magnetfeldes nur von der Richtung z der Hauptkomponente \mathbf{B}_0 des Feldes abhängig sind, explizit Gebrauch von der sog. quasi-linearen Näherung gemacht (siehe Isichenko 1991; Kadomtsev & Pogutse 1979). In diesem Fall ist die magnetische Diffusivität gegeben durch

$$D_M = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \delta\mathbf{b}(z) \cdot \delta\mathbf{b}(0) \rangle dz. \quad (3.48)$$

Bei der Beschreibungsweise des Feldes durch lineare Näherung innerhalb der Zufallsschritt-Methode gilt $\delta\mathbf{b}(z) = \text{const} = \delta\mathbf{b}_j$ für $z \in [j\Delta z, (j+1)\Delta z)$. Damit kann Gl. (3.48) geschrieben werden

$$D_M = \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \langle \delta\mathbf{b}_j \cdot \delta\mathbf{b}_0 \rangle \Delta z. \quad (3.49)$$

Weiterhin sind die Fluktuationen für verschiedene Abschnitte Δz (d.h. verschiedene j) statistisch unabhängig. Dies bedeutet $\langle \delta\mathbf{b}_j \cdot \delta\mathbf{b}_k \rangle = 0$ für $j \neq k$ und führt auf

$$D_M = \frac{1}{2} \langle \delta\mathbf{b}_0^2 \rangle \Delta z. \quad (3.50)$$

Die Fluktuationen des Feldes werden nun gemäß $\delta\mathbf{b}_j \cdot \hat{\mathbf{e}}_x = \Delta x_{i,j}/\Delta z$ in der Simulation umgesetzt. Dabei sei $\Delta x_{i,j}/\Delta z$ gleichverteilt über den Bereich $2b_{\max}$ mit $(\Delta x_{i,j}/\Delta z) \in [-b_{\max}, b_{\max}]$. In diesem Fall ist $\langle \delta\mathbf{b}_j^2 \rangle = \langle (\Delta x_{i,j}/\Delta z)^2 \rangle = b_{\max}^2/3$. Der magnetische Diffusionskoeffizient D_M ist somit gegeben durch

$$D_M = \frac{1}{6} b_{\max}^2 \Delta z. \quad (3.51)$$

Die longitudinale Korrelationslänge dieses Feldes, d.h. die Skala entlang \mathbf{B} , auf der die Fluktuationen nicht statistisch unabhängig sind, entspricht daher gerade Δz (vgl. Kadomtsev & Pogutse 1979).

Der Diffusionskoeffizient κ_{\parallel}

Die Diffusion eines Teilchens entlang der Magnetfeldlinien wird beschrieben durch den Koeffizienten κ_{\parallel} , der laut Gleichung (1.24) mit dem Pitchwinkel-Diffusionskoeffizienten $D_{\mu\mu}$ (Gl. 1.25) gegeben ist durch

$$\kappa_{\parallel} = \frac{1}{4} v^2 \Delta t \int_{-1}^1 d\mu \frac{(1 - \mu^2)^2}{\langle (\Delta\mu)^2 \rangle}. \quad (3.52)$$

Die Geschwindigkeit hochenergetischer Teilchen, wie sie hier betrachtet werden, ist die Lichtgeschwindigkeit. Ausgedrückt mit den in diesem Kapitel eingeführten Längen- und Zeitskalen ist diese gegeben durch $v = c = n_{\max} \Delta z / \Delta t$. Damit wird Gl. (3.52) zu

$$\kappa_{\parallel} = \frac{n_{\max}^2 (\Delta z)^2}{4 \Delta t} \int_{-1}^1 d\mu \frac{(1 - \mu^2)^2}{\langle (\Delta \mu)^2 \rangle}. \quad (3.53)$$

Das Integral wird bestimmt durch die spezielle Form der Verteilung von $\langle (\Delta \mu)^2 \rangle$. Diese wird im nächsten Abschnitt explizit angegeben.

Pitchwinkelstreuung

Die Wechselwirkung eines Teilchens mit Irregularitäten des Magnetfeldes führt zu zufälligen Änderungen des Pitchwinkels des Teilchens. Die Größe dieser Änderungen ist im Prinzip nur durch den Definitionsbereich $\alpha = \arccos \mu \in [0, \pi]$ begrenzt. Pitchwinkeldiffusion bezeichnet aber die symmetrische Änderung um einen kleinen Winkel, d.h. $\Delta \alpha \ll 1$. Gleichzeitig führt Pitchwinkeldiffusion zu einer isotropen Verteilung. Das bedeutet: Unterliegen viele Teilchen mit demselben anfänglichen Pitchwinkel unabhängigen Streuprozessen, so wird im Grenzfall vieler Streuprozesse eine isotrope Verteilung erreicht. Diese Eigenschaften muß eine Simulation dieses Prozesses gewährleisten. Wir benutzen dazu eine spezielle, an eine Gauß-Kurve angelehnte Verteilung, die die Voraussetzungen erfüllt. $W(\alpha, \alpha')$ sei die Wahrscheinlichkeitsverteilung, den Pitchwinkel α nach der Streuung eines Teilchens mit dem ursprünglichen Pitchwinkel α' zu erhalten:

$$W(\alpha, \alpha') = \frac{((\pi - \alpha) \alpha)^q}{N(\alpha', \sigma_\alpha)} \exp \left[-\frac{(\alpha - \alpha')^2}{2\sigma_\alpha^2} \right], \quad (3.54)$$

mit einem Normierungsfaktor $N(\alpha', \sigma_\alpha)$, der nun auch vom ursprünglichen Pitchwinkel α' abhängt, da diese Verteilung nicht mehr translationsinvariant ist. Unter Benutzung dieser Verteilung erhält man für einen geeignet gewählten Exponenten q nach vielen Streuungen eine isotrope Verteilung für $\mu = \cos \alpha$, wie in Abb. 3.6 gezeigt ist, wobei $q = 0.59$ gewählt wurde. Dies ist jedoch nur eine notwendige und keine hinreichende Bedingung für die Beschreibung von Pitchwinkelstreuung. Eine physikalisch korrekte Behandlung dieses Prozesses ist nur durch Betrachtung der Störungen möglich, die zur Änderung des Pitchwinkels führen (siehe z.B. Jokipii 1971). Da die hier dargestellten Ergebnisse nicht sensibel auf Details der Pitchwinkelstreuung sind, stellt die Gleichung (3.54) eine geeignete Verteilung dar, die leicht numerisch ausgewertet werden kann.

Um die Ergebnisse der Simulation mit dem analytisch gegebenen Propagator vergleichen zu können, ist es jedoch notwendig, das Integral in κ_{\parallel} (Gl. 3.53) mit

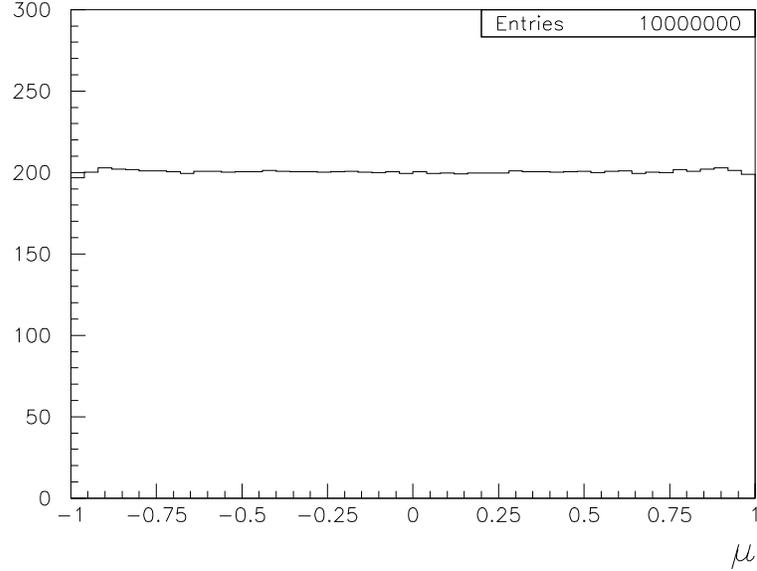


Abbildung 3.6: Pitchwinkelverteilung von 10^7 aufeinanderfolgenden Streuungen. Dies führt in guter Näherung zu einer isotropen Verteilung in μ . Für diese Verteilung wurden die Parameter $\sigma_\alpha = 0.2$ und $q = 0.59$ benutzt.

Hilfe der Verteilung (3.54) zu berechnen. In Analogie zu dem Fall, in dem die mittlere Streuung $\langle(\Delta\mu)^2\rangle$ unabhängig von μ ist, definieren wir für das Integral die Größe $\langle(\Delta\mu)^2\rangle_{\text{eff}}$ auf folgende Weise

$$\frac{1}{\langle(\Delta\mu)^2\rangle_{\text{eff}}} \int_{-1}^1 d\mu (1 - \mu^2)^2 := \int_{-1}^1 d\mu \frac{(1 - \mu^2)^2}{\langle(\Delta\mu)^2\rangle}. \quad (3.55)$$

Die numerische Berechnung des Integrals auf der rechten Seite unter Benutzung der Verteilung (3.54) mit $\sigma_\alpha = 0.2$ und $q = 0.59$ führt so auf die mittlere quadratische Streuung $\langle(\Delta\mu)^2\rangle_{\text{eff}} = 0.031$. Damit ergibt sich für den parallelen Diffusionskoeffizienten (Gl. 3.53)

$$\kappa_{\parallel} = \frac{4}{15} \frac{n_{\text{max}}^2}{\langle(\Delta\mu)^2\rangle_{\text{eff}}} \frac{(\Delta z)^2}{\Delta t}. \quad (3.56)$$

Die Verteilung (3.54), mit den genannten Parametern, wird für alle weiter unten beschriebenen Simulationen benutzt. Dazu wurde eine kumulative Verteilung an 50 Stellen für wiederum 50 Werte von $\cos \alpha'$ berechnet.

3.4 Ergebnisse

Um zu zeigen, daß die hier dargestellte Methode tatsächlich geeignet ist, *sub*-diffusiven Transport zu simulieren, wird zunächst die räumliche Verteilung von Teilchen mit den in Kapitel 1.2 und 3.2 dargestellten analytischen Ergebnissen verglichen. Dabei sind die Ergebnisse der Simulation mit der Form des Propagators zu vergleichen, der analytisch explizit angegeben wurde. Weiterhin wurde für die Dichteverteilung das Verhältnis weit im Unterlauf mit dem an der Stelle der Injektion (Stoßfront) analytisch berechnet. Dieses läßt sich ebenfalls in der simulierten Dichteverteilung überprüfen.

Die hier dargestellte Simulationsmethode ist aber nicht ausschließlich für stochastische Magnetfelder geeignet. Hält man die x -Komponente des Magnetfeldes und damit $\Delta x_{i,j}$ (siehe Abb. 3.4) fest, so beschreibt man schräge Stoßfronten. Teilchenbeschleunigung bei dieser Konstellation ist sehr oft Gegenstand von analytischen sowie numerischen Untersuchungen gewesen (z.B. Webb et al. 1983; Decker 1988; Kirk & Heavens 1989; Naito & Takahara 1995), so daß z.B. die hier gefundenen Impulsspektren von beschleunigten Teilchen mit schon bekannten Ergebnissen verglichen werden können. Hierbei sind nicht mehr die statistischen Eigenschaften des Magnetfeldes von Bedeutung, sondern hauptsächlich die Bewegung der Teilchen entlang des Feldes und im besonderen die Prozesse beim Übergang über die Stoßfront, wie sie im Kapitel 3.1.2 beschrieben wurden.

Im Kapitel 3.4.3 werden schließlich Impulsspektren dargestellt, wie sie für Teilchen erhalten werden, die sich in einem stochastischen Magnetfeld bewegen, das hauptsächlich senkrecht zur Stoßnormalen gerichtet ist. Darüber hinaus eignet sich die benutzte Methode auch, um deren Dichte- und Pitchwinkelverteilung darzustellen.

3.4.1 Propagator und Dichteverteilung

Zunächst schreiben wir den Propagator (1.44) mit Hilfe von dimensionslosen Koordinaten. Dieser wird dann zu⁹

$$P(\xi, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{s\tau}} \exp \left[-\xi^2/(4s) - s^2/(4\tau) \right] \quad (3.57)$$

mit

$$\xi = \left(\frac{u_s}{D_M^2 \kappa_{\parallel}} \right)^{\frac{1}{3}} x, \quad \tau = \left(\frac{u_s^4}{D_M^2 \kappa_{\parallel}} \right)^{\frac{1}{3}} t, \quad (3.58)$$

wobei $u_s = \beta_s c$ die Stoßgeschwindigkeit ist. Diese Form des Propagators gilt

⁹Zu beachten ist die Normierungsbedingung $\int P(x, t) dx = 1 = \int P(\xi, \tau) d\xi$.

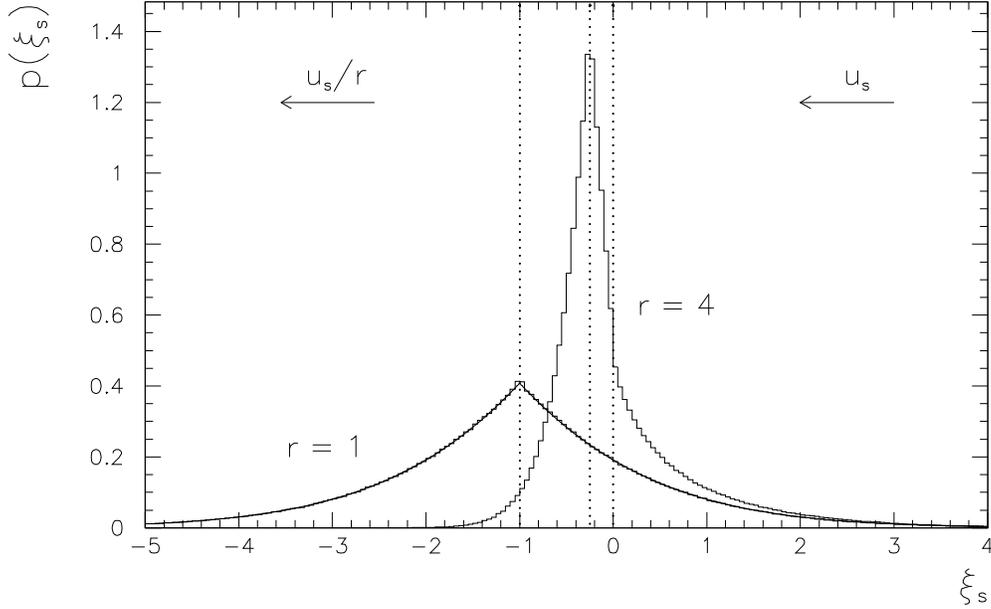


Abbildung 3.7: Normierte Verteilungen für *sub*-diffusiven Transport ($\epsilon = 0$) bei einer dimensionslosen Zeit $\tau = 1.0$ für Teilchen, die bei $\xi = 0$ und $\tau = 0$ injiziert wurden (siehe Gl. 3.58); für $r = 1$ und für im Unterlauf komprimiertes Plasma mit $r = 4$. Die senkrechten gepunkteten Linien befinden sich bei $\xi_s = 0$ und $\xi_s = \tau/r$ (d.h. -1 und $-1/4$). Die durchgezogene Linie stellt für den Fall $r = 1$ den Verlauf des durch die Formel (3.57) analytisch gegebenen Propagators dar. Es wurden folgende Parameter gewählt: $\beta_s = 0.0001$, $n_{\max} = 0.5$, $b_{\max} = 0.05$, $\langle(\Delta\mu)^2\rangle_{\text{eff}} = 0.031$, $t = 3909\Delta t$ und die Anzahl der unabhängigen Teilchen ist jeweils $2.53 \cdot 10^6$.

zunächst nur für $r = 1$, d.h. kontinuierlichen Plasmafluß über die Injektionsfläche der Teilchen (gleich Stoßfront für $r \neq 1$). Verwenden wir die in Form der speziellen Simulationsparameter ausgedrückten Koeffizienten D_M und κ_{\parallel} (Gl. 3.51 und Gl. 3.56), so erhalten wir

$$\xi = 3 \left(5 \frac{\beta_s \langle(\Delta\mu)^2\rangle_{\text{eff}}}{n_{\max} b_{\max}^4} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{x}{\Delta z}, \quad (3.59)$$

$$\tau = 3 \left(5 \frac{\beta_s^4 n_{\max}^2 \langle(\Delta\mu)^2\rangle_{\text{eff}}}{b_{\max}^4} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{t}{\Delta t}, \quad (3.60)$$

wobei wieder $c = n_{\max} \Delta z / \Delta t$ benutzt wurde. Analog zu x_s führen wir noch den dimensionslosen Abstand ξ_s eines Teilchens mit der Koordinate ξ zur Stoßfront ein:

$$\xi_s := \xi - \tau. \quad (3.61)$$

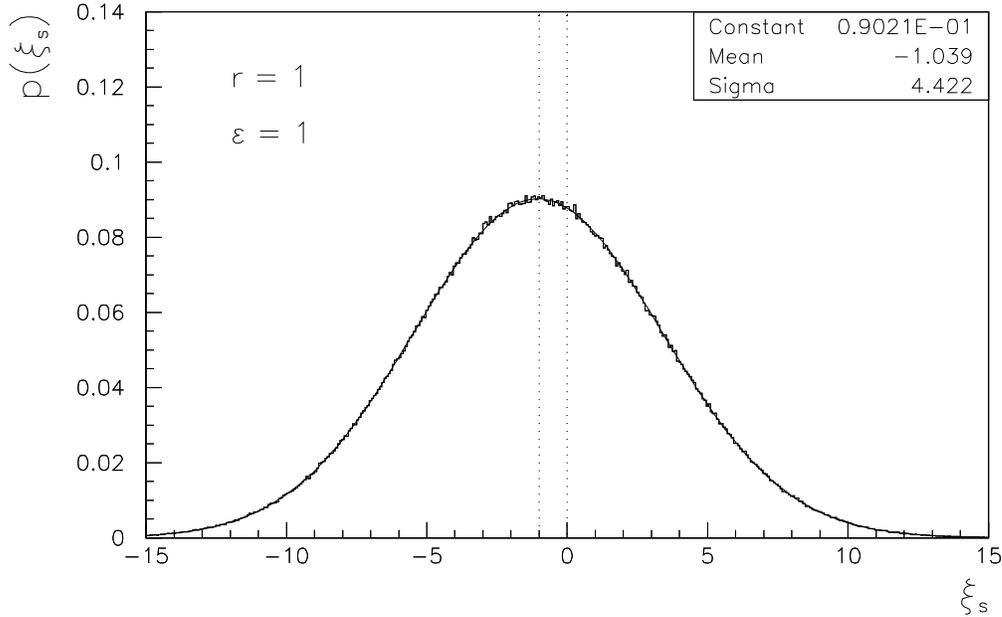


Abbildung 3.8: Normierte Verteilung für diffusiven Transport ($\epsilon = 1$) bei einer dimensionslosen Zeit $\tau = 1.0$ für einen kontinuierlichen Plasmafluß über die Stoßfront ($r = 1$). Der Schwerpunkt der bei $\xi = 0$ und $\tau = 0$ injizierten Teilchen befindet sich bei $\xi_s = \xi - \tau = -1$. Die durchgezogene Linie stellt einen 'Fit' durch eine Gauß-Verteilung dar. Die gewählten Parameter sind identisch mit den in der Beschreibung von Abb. 3.7 angegebenen. Die Anzahl der Teilchen beträgt $2.6 \cdot 10^6$.

Die Beschreibung durch ξ_s kommt einer Transformation in ein Koordinatensystem gleich, in dem die Stoßfront ruht. Da wir (speziell in diesem Abschnitt) nur nicht-relativistische Stoßgeschwindigkeiten betrachten, brauchen wir für Koordinatentransformationen senkrecht zur Stoßfront nur Transformationen mit $\beta_s \ll 1$ zu berücksichtigen.

Seien Teilchen bei $\tau = 0$ und $\xi = 0$ injiziert, so beschreibt $P(\xi_s) \equiv P(\xi_s + \tau, \tau)$ den Abstand der Teilchen von der Injektionsebene zur Zeit τ . In Abb. 3.7 ist der Ort von Teilchen nach der Zeit $\tau = 1$ gezeigt, die bei $\tau = \xi = 0$ (rechte gepunktete Linie) an einem beliebigen Abschnitt verschiedener Magnetfeldlinien injiziert wurden. Für kontinuierlichen Plasmafluß, d.h. $r = 1$, wird sich das Teilchenpaket entlang ξ ausbreiten und dabei durch die Plasmabewegung bis zu $\xi_s = -1$ verschoben (linke gepunktete Linie). Die entsprechende normierte Verteilung der Monte-Carlo-Simulation ist in Abb. 3.7 dargestellt. Außerdem ist durch eine durchgezogene Linie der Verlauf des analytisch durch Gl. (3.57) gegebenen Propagators gezeigt. Dabei ist zu bemerken, daß die Übereinstimmung dieser Kurve mit der Monte-Carlo-Simulation sehr gut ist. Dies ist *nicht* trivial, da von der expliziten Form des Propagators bei der verwendeten Simulationsmethode kein

Gebrauch gemacht wurde.

Im Falle einer Kompression im Unterlauf-Plasma wird der Schwerpunkt der Verteilung mit der Geschwindigkeit u_s/r fortbewegt. Für die benutzten Parameter bedeutet das, daß dieser in der Zeit τ von $\xi_s = 0$ bis $\xi_s = -1/4$ fortschreitet. Die mittlere gepunktete Linie befindet sich bei $\xi_s = -1/4$. Außerdem wird das Teilchenpaket durch die Kompression des zur Stoßnormalen hauptsächlich senkrechten Magnetfeldes ebenfalls komprimiert.

Wie in Kapitel 3.3 beschrieben wurde, ist es leicht möglich Teilchen zu simulieren, die nicht zeitlich unbegrenzt an eine einzelne Magnetfeldlinie gebunden sind. In diesem Fall muß der Berechnung der einzelnen Magnetfeldabschnitte eine rein zufällige Komponente beigemischt werden. Im Extremfall bewegt sich das Teilchen nicht auf einem statischen Magnetfeld (das natürlich durch die Stoßdynamik räumlich bewegt ist), sondern jeder einzelne Abschnitt Δz des Feldes, auf dem sich das Teilchen bewegt, ist unabhängig von seiner Vorgeschichte. Dies führt dazu, daß die Bewegung der Teilchen auch in der Richtung senkrecht zu \mathbf{B}_0 diffusiv wird und durch eine Gaußsche Verteilung (Gl. 1.29) beschrieben wird (siehe Kirk et al. 1996). In Abb. 3.8 ist nun eine Simulation mit dem Dekorrelationsparameter $\epsilon = 1$ dargestellt. Diffusives Verhalten entlang der Richtung x (bzw. ξ_s) wird erreicht auf Skalen, auf denen viele lineare Abschnitte des Feldes überschritten werden müssen. Das bedeutet $x \gg b_{\max} \Delta z$, bzw. für die in Abb. 3.8 gewählten Parameter $\xi \gg 0.26$. Dies ist bei der abgebildeten Verteilung sicherlich gegeben; entsprechend gut ist die Übereinstimmung mit der angepaßten Gauß-Kurve.

Während die Darstellung des Propagators eine Auflösung in der Zeit verlangt, ist dies für die in Kapitel 3.2 dargestellte Dichteverteilung nicht nötig. Zur Simulation der Verteilung (3.41) kann der Abstand eines Teilchens von der Stoßfront nach jedem Zeitabschnitt Δt benutzt werden. Diese Größe ist zunächst für einen kontinuierlichen Plasmafluß ($r = 1$) gegen ξ_s in Abb. 3.9 aufgetragen. Für große negative Werte von ξ_s strebt diese Verteilung einen konstanten Wert an, auf den diese normiert wurde ($n(-\infty) := 1$). Gemäß Gleichung (3.42) sollte dann die Dichte an der Stelle der Injektion (Stoßfront) um den Faktor $2/3$ reduziert sein ($n(0) = 2/3$). Dies ist in Abb. 3.9 durch die entsprechende gestrichelte Linie angedeutet. Dieser Wert wird bei der Simulation mit großer Genauigkeit erreicht. Bei den hier gewählten Parametern ist die Zeit zwischen zwei Kreuzungen der Injektionsebene (oder auch jeder anderen Ebene) im Mittel $t = 11.4 \Delta t$, während die Anzahl der überstrichenen linearen Feldabschnitte im Mittel $z = 3.3 \Delta z$ beträgt. Dies kann somit als ausreichend angesehen werden, um tatsächlich ideales *sub*-diffusives Verhalten mit $\langle (\Delta x)^2 \rangle \propto t^{1/2}$ zu erzeugen.

Die in Kapitel 3.2 abgeleiteten Aussagen gelten unter der Voraussetzung, daß die Pitchwinkelverteilung annähernd isotrop ist. Das ist sicherlich gegeben für einen kontinuierlichen Plasmafluß ($r = 1$), da hier kein Prozeß für eine Änderung dieser Verteilung sorgen kann. Die oben beschriebenen Simulationen zeigen

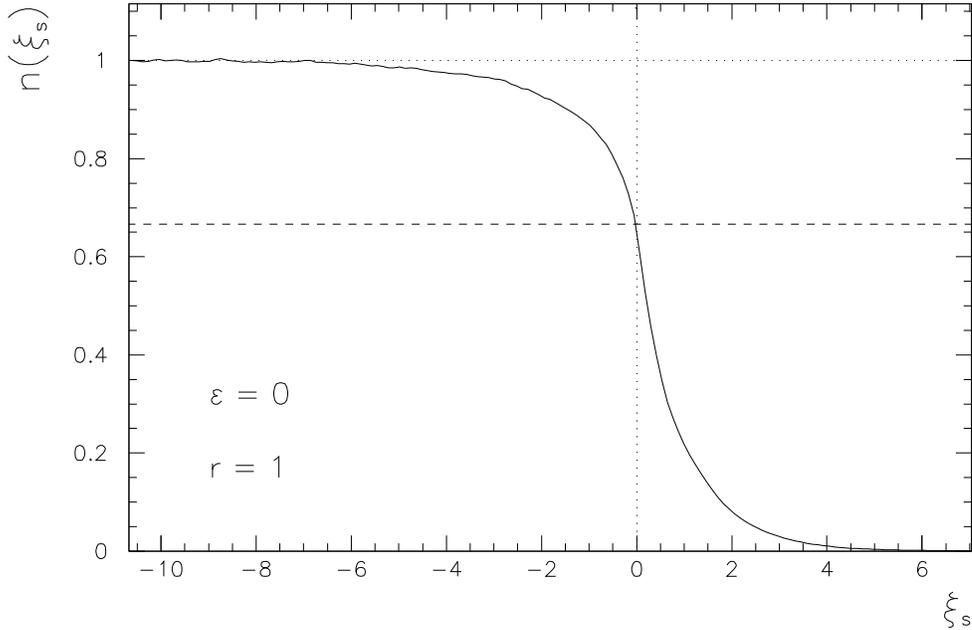


Abbildung 3.9: Monte-Carlo-Simulation der Dichteverteilung $n(\xi_s)$ für kontinuierlichen Plasmafluß ($r = 1$), normiert auf die weit im Unterlauf konstante Dichte, für Teilchen, die strikt an das Magnetfeld gebunden sind. Die gestrichelte Linie befindet sich bei $2/3$. Es wurden folgende Parameter gewählt: $\beta_s = 0.0001$, $n_{\max} = 0.5$, $b_{\max} = 0.05$, $\langle(\Delta\mu)^2\rangle_{\text{eff}} = 0.031$. Die Anzahl der unabhängigen Teilchen ist $3.2 \cdot 10^4$.

dieses Verhalten. Es gibt keine signifikanten Abweichungen von der in Abb. 3.6 dargestellten Verteilung.

Für im Unterlauf stark komprimiertes Plasma (z.B. $r = 4$) ist diese Annahme der isotropen Pitchwinkelverteilung nur noch eingeschränkt gültig. Der Pitchwinkel unterliegt zunächst bei jedem Übergang oder Reflexion von der Stoßfront einer Änderung, jedoch sorgt die fortwährende Pitchwinkelstreuung für eine Isotropisierung im Ober- und Unterlauf. Direkt an der Stoßfront kann die Pitchwinkelverteilung jedoch von der Isotropie abweichen. Dies wird durch Abb. 3.10 verdeutlicht. Dort ist jeweils der Pitchwinkel der Teilchen, gemessen im ORS,¹⁰ zu einem Zeitpunkt, der unmittelbar vor oder nach einer Stoßbegegnung liegt. Die gepunkteten Linien markieren den maximalen Pitchwinkel (gemessen im dHTS), mit dem Teilchen im Oberlauf von der Stoßfront reflektiert werden können. Der Winkel ist gegeben durch $|\tilde{\mu}_{\max}| < \sqrt{1 - 1/r}$ (siehe Gl. 3.27, mit der Annahme $\gamma_s = 1$). Das bedeutet, alle Teilchen die im ORS (und damit auch im dHTS) einen Pitch-

¹⁰Siehe Kap. 3.1.2. Wegen der hier benutzten sehr kleinen Stoßgeschwindigkeit ändern sich die angegebenen Größen beim Übergang zum URS nicht. Daher wird hier die Unterscheidung zwischen ORS- und URS-Koordinaten fallengelassen.

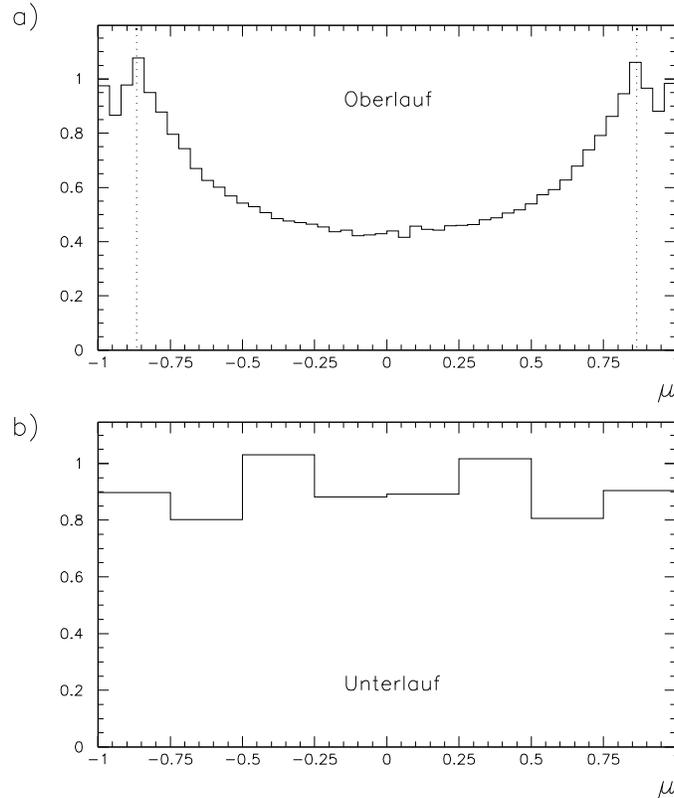


Abbildung 3.10: Pitchwinkelverteilung bei einem Kompressionsverhältnis von $r = 4$ für Teilchen, die sich vor (oder nach) der Stoßbegegnung (a) im Oberlauf oder (b) im Unterlauf befinden. Die gepunkteten Linien stellen den maximalen Betrag des Pitchwinkels dar, bei dem Teilchen im Oberlauf von der Stoßfront reflektiert werden können. Alle Parameter sind mit denen von Abb. 3.11 identisch. Die Normierung ist willkürlich.

winkel größer als $|\tilde{\mu}_{\max}|$ haben, werden in die Unterlauf Region transmittiert.¹¹ Das bedeutet wiederum, daß die Anzahl der Teilchen mit diesen Pitchwinkeln im Oberlauf reduziert wird (sog. Verlustkegel). Bei einer Reflexion wird, gemessen im ORS, der Betrag des Pitchwinkels vergrößert, so daß es im ORS auch zu einer Reduzierung der Teilchen mit Pitchwinkel um Null kommt. Im Unterlauf spielen solche Prozesse jedoch keine entscheidende Rolle, so daß hier die Verteilung durch fortwährende Pitchwinkelstreuung selbst unmittelbar an der Stoßfront annähernd isotrop gehalten wird (siehe Abb. 3.10).¹²

Die nicht-isotrope Pitchwinkelverteilung im Oberlauf hat Konsequenzen für

¹¹Falls es kein dHTS gibt, also bei 'superluminalen' Stoßfronten, werden Teilchen unabhängig von ihrem Pitchwinkel grundsätzlich transmittiert.

¹²Der Grund für die geringere Auflösung in μ liegt darin, daß durch die Diskretisierung nur wenige mögliche Pitchwinkel in dem Verlustkegel im Oberlauf liegen. Diese werden aber über den ganzen Bereich von μ im Unterlauf verteilt.

die Kontinuität der Dichteverteilung an der Stoßfront. Betrachten wir dazu das Liouville–Theorem im dHTS. Für die Phasenraumdichte entlang der Trajektorie von Teilchen, die die Stoßfront kreuzen, gilt dann

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = f'(\mathbf{x}', \mathbf{p}'), \quad (3.62)$$

wobei die Tilde zur Bezeichnung der Größen im dHTS weggelassen wurde. Unterlauf–Größen sind gestrichen. Für die Teilchendichte an einem Ort \mathbf{x} mit Pitchwinkel μ gilt

$$n(\mathbf{x}, \mu) = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) p^2 dp d\phi. \quad (3.63)$$

Im dHTS ist nun der Impulsbetrag über die Stoßfront erhalten, außerdem betrachten wir wieder die Verteilung als gyrotropisch. Sei nun \mathbf{x} ein Ort auf der infinitesimal dünnen Stoßfront, so folgt aus Gl. (3.62) und Gl. (3.63) an dieser Stelle

$$n_t(\mu) = n'_t(\mu'), \quad (3.64)$$

dabei bezeichne der Index t , daß dies nur für tatsächlich transmittierte Teilchen gilt. Die Pitchwinkel μ und μ' sind durch die Beziehung (3.26) verknüpft. Die über μ integrierte Teilchendichte setzt sich im Oberlauf zusammen aus der Dichte der Teilchen, die transmittiert werden, und der Dichte derjenigen Teilchen, die reflektiert werden:¹³

$$n_+ := \int_0^{\mu_g} n_r(\mu) d\mu + \int_{\mu_g}^1 n_t(\mu) d\mu, \quad (3.65)$$

$$n_- := \int_0^1 n'_t(\mu') d\mu', \quad (3.66)$$

wobei μ_g der Grenz–Pitchwinkel für Transmission ist (siehe Gl. 3.27). Sei nun die Oberlauf–Verteilung der transmittierten Teilchen unabhängig von μ , d.h. $n_t(\mu) \equiv n_t$, so gilt dies wegen Gl. (3.64) auch für die Dichte im Unterlauf, d.h. $n'_t(\mu') \equiv n'_t = n_t$. Schreiben wir \bar{n}_r für einen geeigneten Mittelwert der im Oberlauf reflektierten Verteilung, so gilt unter Benutzung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung für die Differenz aus Gl. (3.65) und Gl. (3.66)

$$n_+ - n_- = (\bar{n}_r - n_t) \sqrt{1 - \frac{1}{r_b}}. \quad (3.67)$$

Diese Beziehung gibt nun die Differenz der Dichten im Oberlauf und Unterlauf direkt an der Stelle der Stoßfront an. Eine analoge Rechnung für die Teilchen,

¹³Wir können uns ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf $\mu > 0$ beschränken.

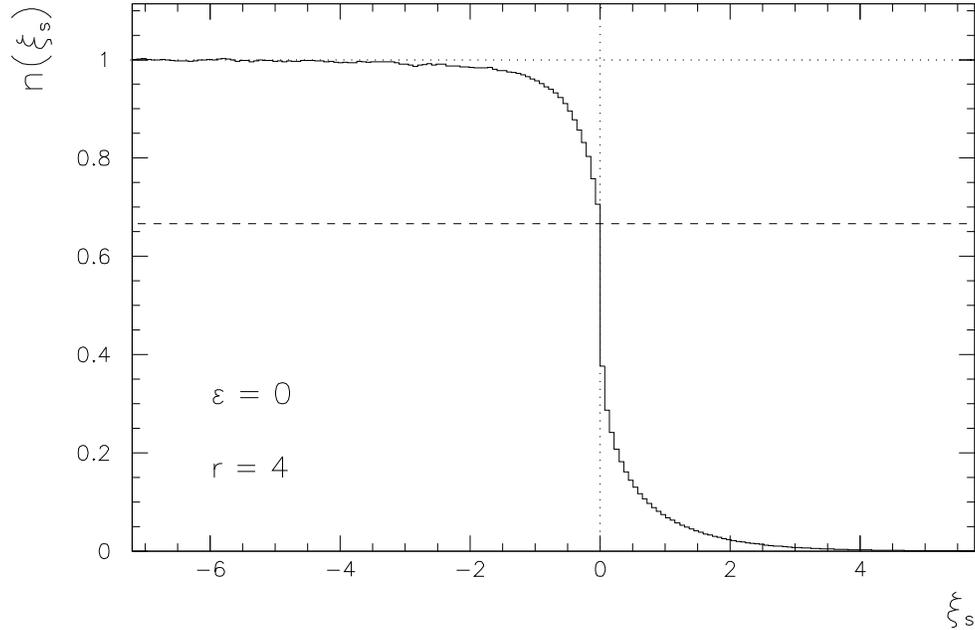


Abbildung 3.11: Monte-Carlo-Simulation der Dichteverteilung $n(\xi_s)$ für $r = 4$, normiert auf die im weit im Unterlauf konstante Dichte, für Teilchen, die strikt an das Magnetfeld gebunden sind. Die gestrichelte Linie befindet sich bei $2/3$. Es wurden folgende Parameter gewählt: $\beta_s = 0.002$, $n_{\max} = 0.5$, $b_{\max} = 0.05$, $\langle(\Delta\mu)^2\rangle_{\text{eff}} = 0.031$. Die Anzahl der unabhängigen Teilchen ist $2.1 \cdot 10^5$.

die sich vom Unterlauf in den Oberlauf bewegen, ergibt unter denselben Voraussetzungen keinen Beitrag zur Differenz der Dichten, so daß Gl. (3.67) die vollständige Dichtedifferenz aller Teilchen an der Stoßfront angibt. Wir haben zu Grunde gelegt, daß der Neigungswinkel zwischen Stoßfront und Magnetfeld einen festen Wert hat, bei dem ein dHTS existiert. Außerdem wurde angenommen, daß die Oberlauf-Pitchwinkelverteilung der transmittierten Teilchen isotrop in μ ist. Gleichung (3.67) zeigt nun, daß selbst bei diesen Annahmen die Dichteverteilung an der Stoßfront nicht stetig sein muß. Stetigkeit würde streng nur für $r = 1 \Rightarrow r_b = 1$ gelten (vgl. Abb. 3.9). Für $r \neq 1$ führt eine mittlere Dichte \bar{n}_r der reflektierten Teilchen, die verschieden ist von der konstanten Dichte n_t der Teilchen, die transmittiert werden, zu einer Unstetigkeitsstelle der Dichte an der Stoßfront, gerade auch unter Berücksichtigung des Liouville-Theorems. In Abb. 3.11 ist die Dichteverteilung für ein Kompressionsverhältnis von $r = 4$ dargestellt. Die entsprechende Pitchwinkelverteilung zeigt Abb. 3.10.¹⁴

Bei der Wahl der Parameter, die zu Abb. 3.10 und 3.11 geführt haben, er-

¹⁴Es ist jedoch zu beachten, daß diese Verteilungen im ORS bzw. URS gemessen worden sind. Außerdem ist hier über alle möglichen Neigungswinkel des Magnetfeldes gemittelt, insbesondere auch für ‘superluminale’ Stoßfronten, bei denen kein dHTS existiert.

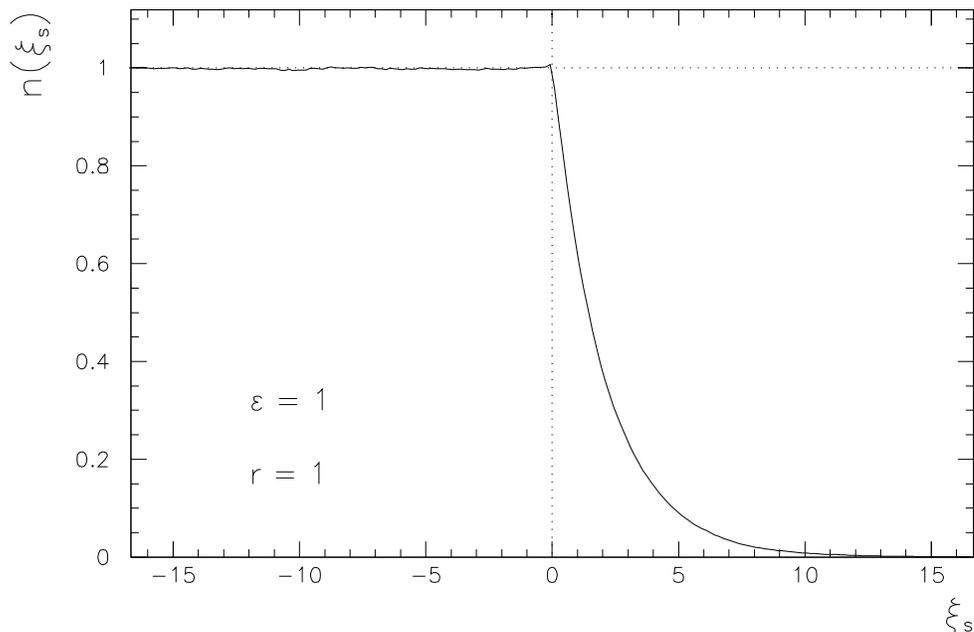


Abbildung 3.12: Monte-Carlo-Simulation der Dichteverteilung $n(\xi_s)$ für kontinuierlichen Plasmafluß ($r = 1$), normiert auf die im Unterlauf konstante Dichte, für Teilchen, die nur auf der Länge Δz an das Magnetfeld gebunden sind. Es wurden folgende Parameter gewählt: $\beta_s = 0.001$, $n_{\max} = 0.5$, $b_{\max} = 0.05$, $\langle(\Delta\mu)^2\rangle_{\text{eff}} = 0.031$. Die Anzahl der unabhängigen Teilchen ist $1 \cdot 10^5$.

gibt sich für die mittlere Anzahl der Zeitschritte zwischen zwei Stoßkreuzungen $t = 7.4 \Delta t$, während die Anzahl der linearen Magnetfeldabschnitte, die ein Teilchen überstreicht, $z = 2.6 \Delta z$ beträgt. Außerdem ist die Pitchwinkelverteilung im Unterlauf näherungsweise isotrop, so daß dort die Bedingungen für *sub*-diffusives Verhalten gegeben sind. Der Grenzwert der normierten Dichteverteilung ist somit im Unterlauf wieder mit sehr großer Genauigkeit gemäß Gl. (3.42) durch $2/3$ (gestrichelte Linie) gegeben. An der Stelle der Stoßfront zeigt die Verteilung eine Diskontinuität. Gleichung (3.67) kann wegen der zur Herleitung gemachten Annahmen nicht quantitativ diesen Sprung beschreiben, jedoch zeigen die Simulationen qualitativ genau das von Gl. (3.67) beschriebene Verhalten.¹⁵

Bei diffusiver Bewegung der Teilchen im Raum stellt sich bei Injektion von Teilchen an der Stoßfront im Unterlauf eine konstante Dichte ein (siehe z.B. Drury 1983; Kirk et al. 1994). In den hier vorgestellten Simulationen wird dies erreicht durch eine Dekorrelation der Teilchen von der Magnetfeldlinie auf Skalen entlang des Feldes die größer sind als Δz (vgl. Abb. 3.8 und den zugehörigen Text). Abbildung 3.12 zeigt eine Simulation von diffusivem Teilchenverhalten für

¹⁵Insbesondere gilt auch $n_+ > n_-$, wenn man als sog. Maxwell'scher Dämon künstlich eine Pitchwinkelverteilung mit $\bar{n}_r > n_t$ erzeugt.

kontinuierlichen Plasmafluß. Die Dichte zeigt links von der Stelle der Injektion ($\xi_s = 0$) einen konstanten Verlauf und fällt im Oberlauf des Plasmas exponentiell ab.

Im allgemeinen kann das Transportverhalten von Teilchen natürlich auch im Bereich zwischen *sub*-Diffusion und Diffusion liegen. Dies hängt von der Stärke der Dekorrelation der Teilchen von der Magnetfeldlinie ab. Im Prinzip läßt sich bei geeignet gewähltem Dekorrelationsparameter ϵ dieser Bereich sehr leicht mit der hier beschriebenen Methode simulieren (siehe Kap. 3.1.2). Die Abbildungen 3.9 und 3.12 beispielsweise würden dann die Grenzfälle der möglichen Dichteverteilungen widerspiegeln. Es kam hier aber zunächst darauf an, die Simulationen mit den analytischen Vorhersagen zu vergleichen und diese abzubilden. Dies wiederum ermöglichte eine Untersuchung der Annahmen über die Pitchwinkelverteilung und deren Einfluß auf die Teilchendichte.

Im nächsten Abschnitt sollen nun Impulsspektren bei schrägen nicht-stochastischen Stoßfronten untersucht werden. Das bedeutet, der anomale Transport wird zunächst ausgeblendet, und es ergibt sich die Möglichkeit, die Simulation des Beschleunigungsvorgangs selbst zu untersuchen.

3.4.2 Spektralindex bei schräger Stoßfront

Die hier dargestellte Methode zur Monte–Carlo–Simulation eines stochastischen Magnetfeldes eignet sich auch zur Simulation von schrägen Stoßfronten. Dieses Problem ist sehr häufig Gegenstand von analytischen (Bell 1978; Drury 1983; Webb et al. 1983; Achterberg & Ball 1994), numerischen (Terasawa 1979; Decker 1988; Kirk & Heavens 1989) und insbesondere Monte–Carlo–Untersuchungen (Ostrowski 1991; Naito & Takahara 1995) gewesen.

Es sollen im folgenden Ergebnisse der Simulationen für schräge ‘subluminale’ Stoßfronten ohne stochastische Komponente dargestellt werden. Außerdem seien die Teilchen strikt an das Magnetfeld gebunden. Bei der in Kapitel 3.3.2 dargestellten Methode erreicht man dies durch ein geeignet gewähltes konstantes $\Delta x_{i,j}$ und durch Setzen des Dekorrelationsparameters $\epsilon = 0$. Alle anderen Komponenten, d.h. die Simulation der Pitchwinkelstreuung und im besonderen die in Kap. 3.1.2 beschriebenen Transformationen bleiben ungeändert.

Es werden Teilchen mit dem Impuls $p = p_0$ an der Stoßfront in Richtung Oberlauf mit beliebigem Pitchwinkel $\mu_0 < \mu < 1$ injiziert.¹⁶ Der Impuls wird dann bei jeder Stoßwechselwirkung im ORS gemessen, wobei mit der Differenz aus Stoßgeschwindigkeit u_s und Projektion der Teilchengeschwindigkeit in Bewegungsrichtung des Stoßes gewichtet wird, da wir an der Dichte $f(p) = f(p, \xi = +0)$ und nicht am Fluß interessiert sind. Diese Dichte der Teilchen mit Impuls p tragen wir gegen äquidistante „bins“ in $\log(p)$ auf, wobei p auf den Injektionsimpuls normiert ist (d.h. $p = 1$ bei Injektion). Sei $f(p) \propto p^{-s}$, so erhalten wir

$$\frac{\Delta N}{\Delta \log(p)} = \frac{N(p)\Delta p}{\Delta \log(p)} = p N(p) \propto p^3 f(p) \propto p^{-s+3}. \quad (3.68)$$

Zur Bestimmung von s passen wir dieser Verteilung eine Kurve der Form

$$y = 10^{p_1 + p_2 x} \quad (3.69)$$

an. Der Spektralindex s ist dann durch $p_2 = -s + 3$ gegeben.

Die Simulation einzelner Teilchen wird beendet, wenn diese einen maximalen Impuls überschritten haben oder sich weit im Unterlauf befinden, so daß die Wahrscheinlichkeit zur Stoßfront zurückzukehren verschwindend klein wird. Im Falle von Stoßfronten mit Neigungswinkeln, die in der Nähe von $\phi \lesssim 90^\circ$ liegen, ist die Dichte unmittelbar vor der Stoßfront im Oberlauf maximal (siehe auch Ostrowski 1991), und die Teilchen gewinnen hauptsächlich durch Reflexion an der Stoßfront Energie, so daß sie in kurzer (Simulations–) Zeit den maximalen Impuls erreichen können. Mit zunehmend parallelem Magnetfeld werden die Teilchen hauptsächlich durch den Stoß transmittiert und gewinnen dabei weniger Energie. Dabei wird das Spektrum steiler, was bedeutet, daß der maximale Im-

¹⁶Dabei sei μ_0 der kleinste mögliche Pitchwinkel, für eine Injektion in Richtung Oberlauf.

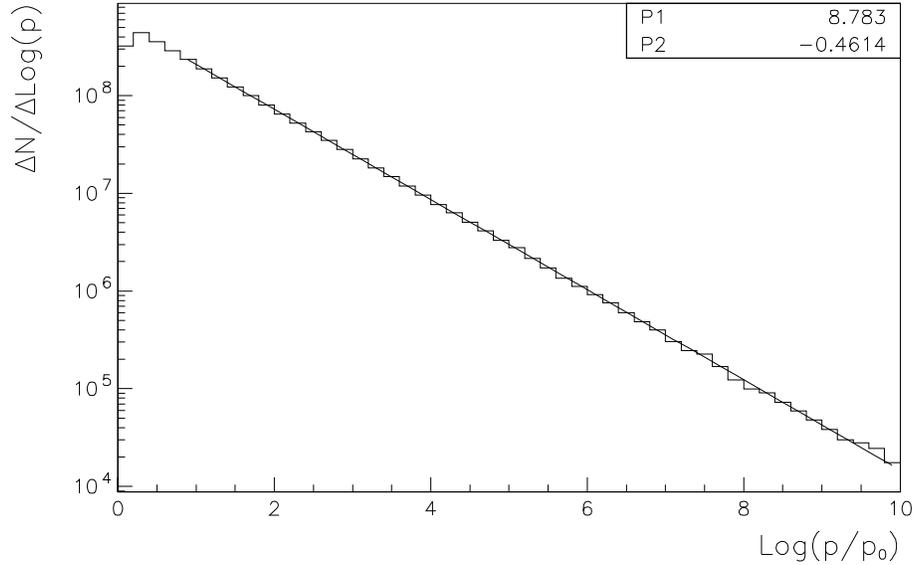


Abbildung 3.13: Monte-Carlo-Simulation des Impulsspektrums bei schräger Stoßfront und Kompressionsverhältnis $r = 4$. Die Geschwindigkeit der Stoßfront beträgt $u_s = 0.01$ und der Neigungswinkel im Oberlauf ist gegeben durch $u_s / \cos \phi = 0.3$. Die durchgezogene Linie stellt eine Anpassung eines Potenzgesetzes mit den Parametern p_1 und p_2 dar (Gl. 3.69). Damit ergibt ein Spektralindex von $s = 3.46$. (Die Anzahl der unabhängigen Teilchenpakete ist $3.1 \cdot 10^5$.)

puls erst sehr viel später erreicht werden kann. Dies führt zu einer signifikanten Verschlechterung der Statistik. Ein Ausweg ist jedoch, in diesem Fall zunächst die Entweichwahrscheinlichkeit P_{esc} in die Unterlauf-Region für den Fall zu bestimmen, daß ein Teilchen die Stoßfront vom Oberlauf in den Unterlauf kreuzt. Ist dieser Wert von P_{esc} einmal bestimmt, kann man zu einer Simulationsmethode übergehen, die den Transport der Teilchen mit Messung des Impulses und Pitchwinkels nur im Oberlauf des Stoßes berücksichtigt. Es ist dadurch möglich auch bei beliebig steilen Spektren, Teilchen bis zu sehr hohen Impulsen mit geringem numerischen Aufwand zu simulieren. Dabei wird jedem Teilchen ein Gewicht g gegeben, das bei jeder Stoßkreuzung vom Oberlauf in den Unterlauf gemäß $g = g \cdot (1 - P_{\text{esc}})$ reduziert wird. Die Teilchen werden dann solange mit jeweils zufälligen Pitchwinkeln und dem neuen Gewicht vom Unterlauf in den Oberlauf injiziert, bis sie den maximalen Impuls erreicht haben. Man kann sich vorstellen, daß jedes Teilchen ein Paket von Teilchen darstellt, dessen Anzahl durch das Gewicht g bestimmt wird. Konkret bedeutet das für die Anzahl der Teilchen, die mehr als n -mal die Stoßfront vom Oberlauf in den Unterlauf kreuzen:

$$N(> n) = N_0 (1 - P_{\text{esc}})^n. \quad (3.70)$$

Dabei ist N_0 die Anzahl der Teilchen, die die Stoßfront mindestens einmal in

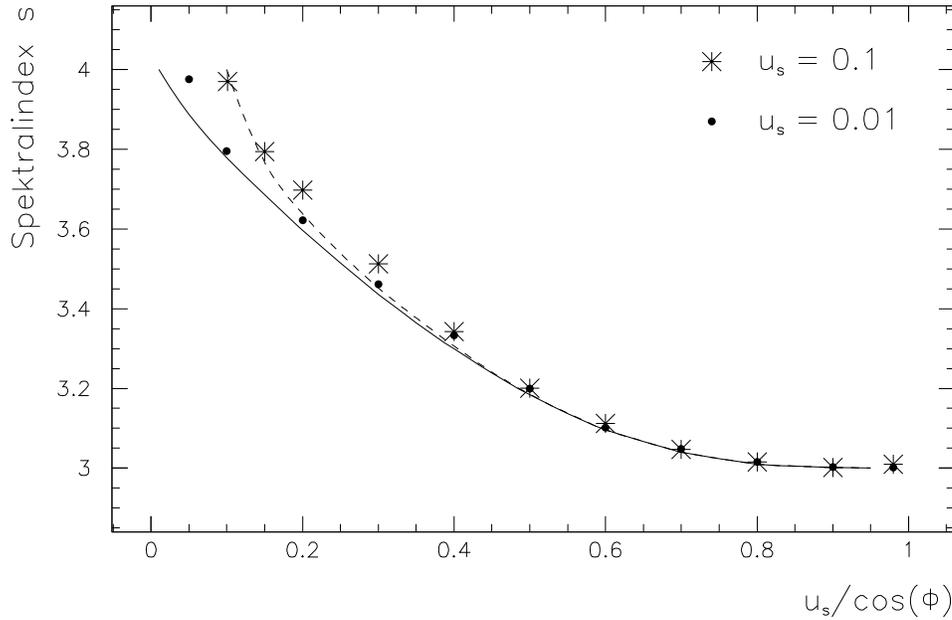


Abbildung 3.14: Vergleich der Spektralindizes der Monte-Carlo-Simulation mit numerischen Berechnungen von Kirk & Heavens (1989), bei einem Kompressionsverhältnis $r = 4$, für schräge Stoßfronten mit verschiedenen Stoßgeschwindigkeiten und Neigungswinkeln. Die durchgezogene Linie stellt die Ergebnisse von K&H (1989) für $u_s = 0.01$ dar. Für diesen Wert von u_s zeigen die Punkte die Ergebnisse der hier beschriebenen Monte-Carlo-Simulationen. Entsprechend stellen die Sterne und die gestrichelte Linie die Spektralindizes für $u_s = 0.1$ dar.

Richtung Unterlauf kreuzen. Durch Auftragen des integralen Spektrums $N(> n)$ gegen n läßt sich P_{esc} bestimmen. Speziell für Situationen, in denen das Impulsspektrum sehr steil ist ($s \gtrsim 4$), ist dies mit höherer Genauigkeit möglich, als die direkte Bestimmung des Impulsspektrums.

In Abb. 3.13 ist ein Impulsspektrum dargestellt, das über die Bestimmung der Entweichwahrscheinlichkeit und anschließender Simulation im Oberlauf bestimmt wurde. Die statistische Genauigkeit ist sehr groß. Der Fehler an den Spektralindex wird dominiert durch systematische Unsicherheiten. Diese sind gegeben durch eine Überbestimmung des Spektralindex durch die endliche Simulationszeit. Da die Simulation eines Teilchens bei der Bestimmung der Entweichwahrscheinlichkeit bei einem endlichen Abstand von der Stoßfront abgebrochen wird, kann dies zu einer Überbestimmung von P_{esc} führen. Dies hat dann direkt ein etwas steileres Spektrum zur Folge.

In Abb. 3.14 ist der Spektralindex, wie er durch die hier beschriebenen Simulationen erhalten wird, direkt mit einer semi-analytischen Lösung der Transportgleichung von Kirk & Heavens (1989) verglichen. Aufgetragen ist der Spek-

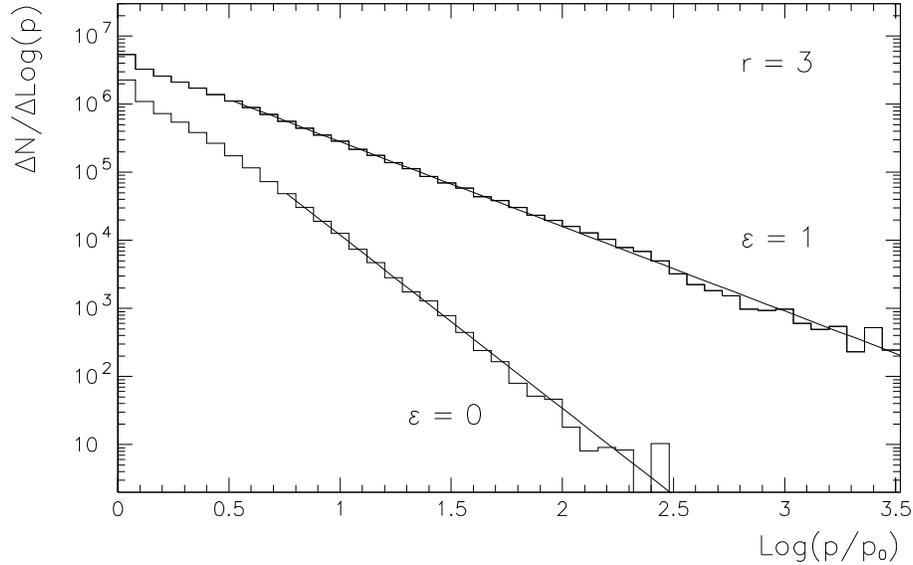


Abbildung 3.15: Monte-Carlo-Simulation des Impulsspektrums bei einem Kompressionsverhältnis $r = 3$. Für Teilchen, die streng mit dem Magnetfeld korreliert sind ($\epsilon = 0$), ergibt sich ein Spektralindex von $s = 5.55$, während für eine Korrelation auf der Längenskala Δz ($\epsilon = 1$) der Spektralindex $s = 4.24$ ist. Die Geschwindigkeit der Stoßfront beträgt $u_s = 0.001$. Die Anzahl der unabhängigen Teilchen ist $4 \cdot 10^5$ (bei $\epsilon = 0$) und $1.8 \cdot 10^5$ (bei $\epsilon = 1$).

tralindex s der Phasenraumdichte gegen die Stoßgeschwindigkeit entlang der Magnetfeldlinie im Oberlauf Ruhesystem $u_s / \cos(\phi)$. Die Punkte und Sterne stellen die Ergebnisse der hier beschriebenen Monte-Carlo-Methode für zwei verschiedene Stoßgeschwindigkeiten dar. Entsprechend sind für diese Stoßgeschwindigkeiten die Ergebnisse von K&H (1989) durch Linien dargestellt. Für die meisten Werte ist die Übereinstimmung besser als 1%.

3.4.3 Spektralindex bei stochastischem Magnetfeld

Die in Kap. 3.3.2 dargestellte Simulationsmethode für stochastische Magnetfelder war nur durch Fallenlassen des zufälligen Charakters der Magnetfeldrichtung abgeändert worden, um die in Kap. 3.4.2 dargestellten Ergebnisse für schräge Stoßfronten zu erhalten. Hier sollen nun die Ergebnisse für den Spektralindex bei *stochastischem* Magnetfeld dargestellt werden, dessen Hauptkomponente \mathbf{B}_0 senkrecht zur Stoßnormalen liegt. Dabei sind wir insbesondere an dem Fall interessiert, bei dem der Teilchentransport *sub*-diffusives Verhalten mit $\langle (\Delta\xi)^2 \rangle \propto t^{1/2}$ zeigt, bzw. durch den Propagator (3.57) beschrieben wird.

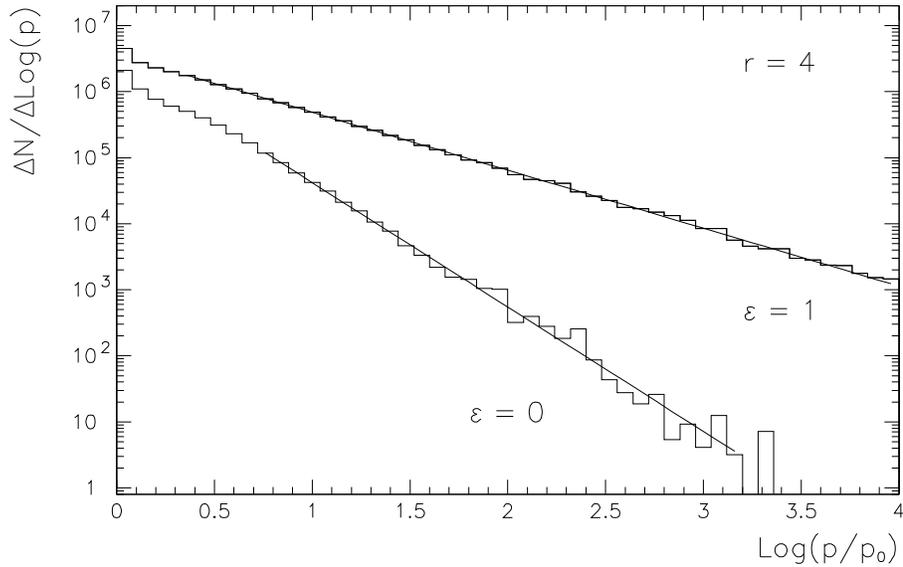


Abbildung 3.16: Monte-Carlo-Simulation des Impulsspektrums bei einem Kompressionsverhältnis $r = 4$. Für Teilchen, die streng mit dem Magnetfeld korreliert sind ($\epsilon = 0$), ergibt sich ein Spektralindex von $s = 4.88$, während für eine Korrelation auf der Längenskala Δz ($\epsilon = 1$) der Spektralindex $s = 3.88$ ist. Die Geschwindigkeit der Stoßfront beträgt $u_s = 0.001$. Die Anzahl der unabhängigen Teilchen ist $5 \cdot 10^5$ (bei $\epsilon = 0$) und $1.5 \cdot 10^5$ (bei $\epsilon = 1$).

In Kapitel 3.4.1 wurde schon dargestellt, daß nicht für beliebige Parameter n_{\max} die Bedingungen für *sub*-diffusives Verhalten erfüllt sind. Ist dies jedoch sichergestellt, so ist der Spektralindex s des resultierenden Impulsspektrums in erster Näherung unabhängig von der Stoßgeschwindigkeit u_s und der Größe der Fluktuationen b_{\max} des Magnetfeldes, solange $b_{\max} \ll 1$ gilt. Der Spektralindex ist dann eine Funktion des Kompressionsverhältnisses r . Wir wählen hier zunächst eine nicht-relativistische Stoßgeschwindigkeit $u_s = 0.001$ und Fluktuationen senkrecht zu \mathbf{B}_0 , die gegeben sind durch $b_{\max} = 0.05$. Für die maximale Anzahl der von einem Teilchen überstrichenen Stützstellen wurde dann bei den folgenden Impulsspektren $n_{\max} = 0.5$ gewählt. Die Realisierung der Pitchwinkelstreuung bleibt mit $\langle(\Delta\mu)^2\rangle_{\text{eff}} = 0.031$ gegenüber dem oben Dargestellten unverändert.

Bei schrägen Stoßfronten ohne stochastischen Anteil, stellt die Bewegung senkrecht zur Stoßfront quasi eine Projektion der Diffusion entlang der Magnetfeldlinie dar und ist daher durch das gleiche diffusive Verhalten geprägt. Das bedeutet insbesondere, daß die Entweichwahrscheinlichkeit in Richtung Unterlauf bei jeder einzelnen Stoßüberquerung unabhängig von der Vorgeschichte der Teilchen ist. Das ermöglichte die Teilchenbewegung im Unterlauf bei der Impulsbestimmung durch einen einzigen Parameter, die Entweichwahrscheinlichkeit P_{esc} , zu ersetzen (wie in Kap. 3.4.2 beschrieben). Eine Simulation der Bewegung weit

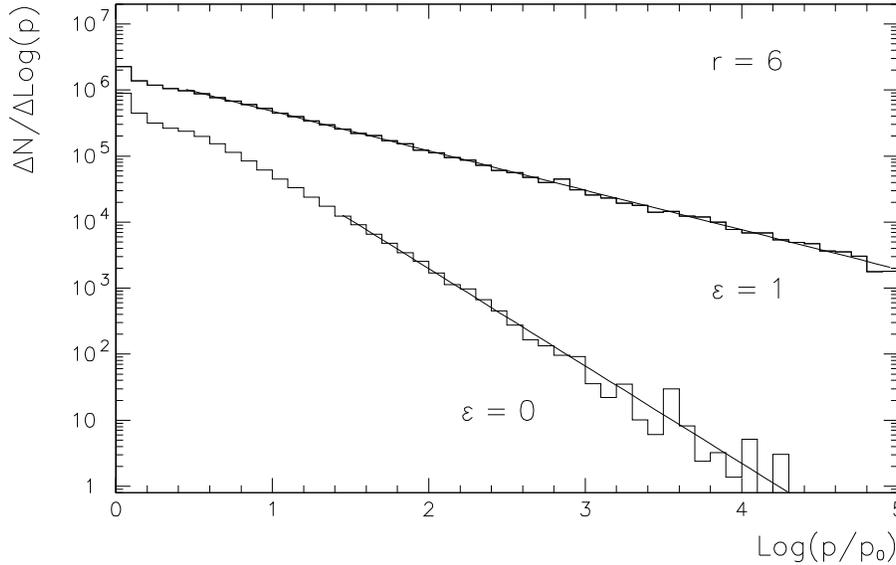


Abbildung 3.17: Monte-Carlo-Simulation des Impulsspektrums bei einem Kompressionsverhältnis $r = 6$. Für Teilchen, die streng mit dem Magnetfeld korreliert sind ($\epsilon = 0$), ergibt sich ein Spektralindex von $s = 4.48$, während für eine Korrelation auf der Längenskala Δz ($\epsilon = 1$) der Spektralindex $s = 3.60$ ist. Die Geschwindigkeit der Stoßfront beträgt $u_s = 0.001$. Die Anzahl der unabhängigen Teilchen ist $5 \cdot 10^5$ (bei $\epsilon = 0$) und $6 \cdot 10^4$ (bei $\epsilon = 1$).

weg von der Stoßfront ist dann nicht mehr nötig. Sind die Teilchen jedoch an stochastische Magnetfelder gebunden, so ist das eben beschriebene Verhalten abgeändert. Die Magnetfeldlinie führt ein „Gedächtnis“ in die Teilchenbewegung ein. Betrachten wir dazu Teilchen, die (im Mittel) die Stoßfront sehr viele Male überquert haben. In dieser Zeit hat sich die Injektionsebene, die bei der Injektion auf der Stoßfront lag, weit in den Unterlauf fortbewegt. Kehren die Teilchen nun auf der Feldlinie zur Injektionsebene zurück, so bedeutet das, daß sie sich dabei in jedem Falle ebenfalls weit in den Unterlauf bewegen müssen. Die Entweichwahrscheinlichkeit wird dadurch höher, als für Teilchen, die dasselbe nach kurzer Zeit, und damit (im Mittel) nach weniger Stoßkreuzungen, vollziehen. Das bedeutet, die Entweichwahrscheinlichkeit bei einer Stoßkreuzung vom Oberlauf in den Unterlauf ist i.A. eine Funktion der Zeit und damit der Anzahl der Stoßkreuzungen, was wiederum eine Abhängigkeit vom Impuls impliziert. In Abbildung 3.18 ist die integrale Verteilung der Stoßkreuzungen vom Oberlauf in den Unterlauf aufgetragen. Für diffusives Transportverhalten in der Richtung senkrecht zur Stoßfront ($\epsilon = 1$) ist die Wahrscheinlichkeit zum Stoß zurückzukehren bei jeder Stoßkreuzung gleich, was in Übereinstimmung mit Gl. (3.70) zu einem Potenzgesetz führt. Abbildung 3.18 zeigt darüber hinaus, daß sich im Falle von *sub*-diffusivem Transport ($\epsilon = 0$) ein Potenzgesetz erst nach einer großen Anzahl

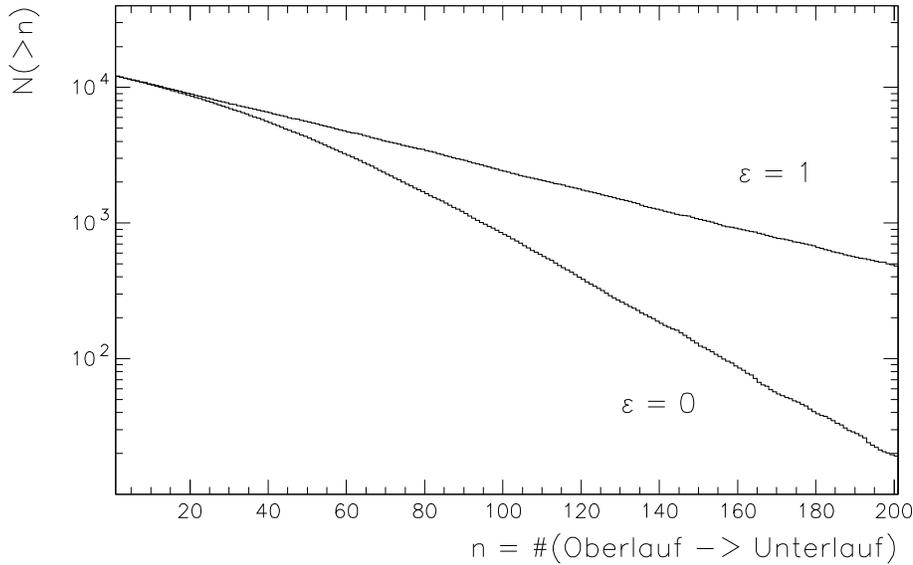


Abbildung 3.18: Darstellung der Anzahl der Stoßkreuzungen vom Oberlauf in den Unterlauf bei $r = 1$ für *sub*-diffusive ($\epsilon = 0$) und diffusive ($\epsilon = 1$) Teilchenbewegung (vgl. Gl. 3.70). Es wurden folgende Parameter gewählt: $u_s = 0.0001$, $n_{\max} = 1.0$, $b_{\max} = 0.05$, $\langle (\Delta\mu)^2 \rangle_{\text{eff}} = 0.031$. Die Anzahl der unabhängigen Teilchen ist $1.2 \cdot 10^4$ ($\epsilon = 1$) und $6 \cdot 10^4$ ($\epsilon = 0$). Die Anzahl der Einträge für $\epsilon = 0$ ist mit dem Faktor 0.2 gewichtet worden.

von Stoßkreuzungen einstellt, und daß dann die Entweichwahrscheinlichkeit P_{esc} größer als für diffusive Teilchenbewegung ist. Daraus folgt, daß die Simulation im Prinzip den Weg jedes Teilchens nachvollziehen muß, bis es tatsächlich eine verschwindende Rückkehrwahrscheinlichkeit zum Stoß besitzt. Diese Bedingung kann mit der *Russisch-Roulette*-Methode auf folgende Weise berücksichtigt werden. Im Unterlauf seien imaginäre äquidistante Ebenen parallel zur Stoßfront markiert. Überschreitet ein Teilchen eine dieser Grenzen in der entgegengesetzten Richtung zur Stoßfront, so wird das Teilchen mit einer Wahrscheinlichkeit von $1/n$ überleben und mit dem Faktor n gewichtet. Ein Teilchen kann so beliebig weit in den Unterlauf vordringen und doch zur Stoßfront zurückkehren. Diese Methode vergrößert aber die statistische Varianz der Ergebnisse, da die Anzahl der Teilchen reduziert wird, diese aber sehr große Gewichte bekommen können. Sie wurde aber als Referenz benutzt, um zu überprüfen, welche Entfernung von der Stoßfront tatsächlich als ausreichend angesehen werden kann, um eine so kleine Rückkehrwahrscheinlichkeit zur Stoßfront zu gewährleisten, daß die Simulation eines einzelnen Teilchens beendet werden kann. In diesem Fall liefern beide Methoden übereinstimmende Ergebnisse.

Die Abbildungen 3.15–3.17 zeigen nun die Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulationen für verschiedene Werte des Kompressionsverhältnisses r . Verglichen

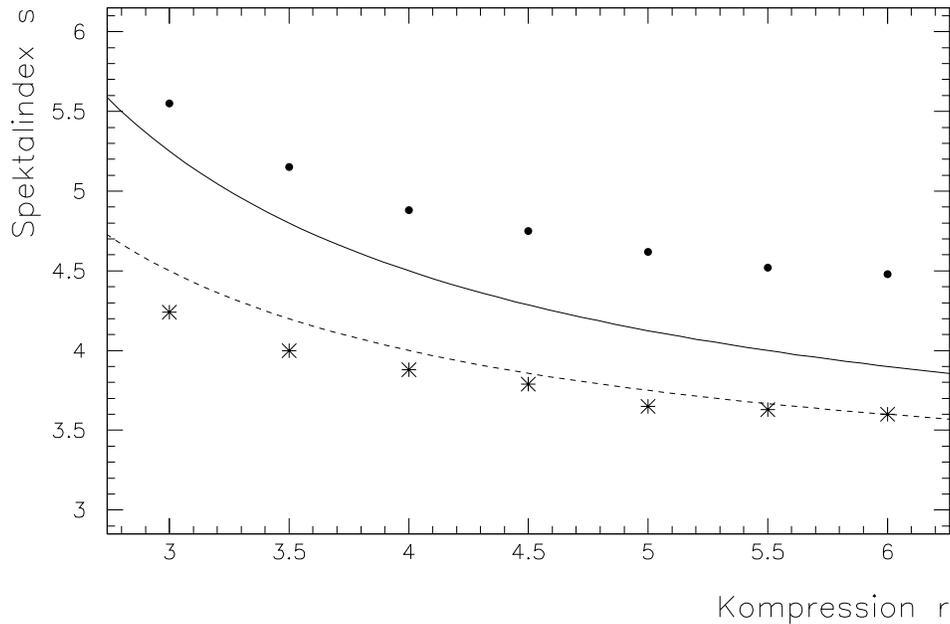


Abbildung 3.19: Vergleich der Spektralindizes der Monte-Carlo-Simulation für Teilchen mit verschiedenem Korrelationsverhalten bezüglich des Magnetfeldes mit analytischen Ergebnissen für *sub*-Diffusion (die durchgezogene Linie entspricht Gl. 3.44; siehe auch Kirk et al. 1996) und klassische Diffusion (die gestrichelte Linie entspricht $s = 3r/(r - 1)$; siehe Kap. 3.1.1). Die Punkte stellen Ergebnisse für streng an das Magnetfeld gebundene Teilchen dar ($\epsilon = 0$), während die Sterne die Ergebnisse für diffusive Teilchenbewegung ($\epsilon = 1$) darstellen. Die entsprechenden Spektren sind teilweise in den vorhergehenden Abbildungen gezeigt.

sind jeweils zwei Spektren für unterschiedliches Korrelationsverhalten der Teilchen an die Magnetfeldlinien.¹⁷ Wie in Kap. 3.3.2 beschrieben, wurde jeweils $\epsilon = 0$ für strikt an die Magnetfeldlinien gebundene Teilchen, und $\epsilon = 1$ für dekorreliert bzw. nur auf der Längenskala Δz an das Magnetfeld gebundene Teilchen gewählt. Dadurch läßt sich der Einfluß des *sub*-diffusiven Transportverhaltens, wie es für $\epsilon = 0$ gegeben ist, untersuchen. Die durchgezogenen Linien stellen jeweils Anpassungen mit einem Potenzgesetz dar (siehe Kap. 3.4.2). Die entsprechenden Spektralindizes sind in den Abbildungsbeschreibungen angegeben.

Es zeigt sich im Falle von streng an das Magnetfeld gebundenen Teilchen jeweils ein signifikant steileres Spektrum als für diffusive Teilchenbewegung senkrecht zur Stoßfront. Dies ist, wie oben dargestellt, darauf zurückzuführen, daß die Teilchen bei Korrelation an das Magnetfeld effektiver durch dieses vom Stoß weggeführt werden. Außerdem stellt sich im Fall von *sub*-Diffusion ein konstanter

¹⁷Zum besseren Vergleich sind die Spektren mit einer geeigneten Konstanten multipliziert worden.

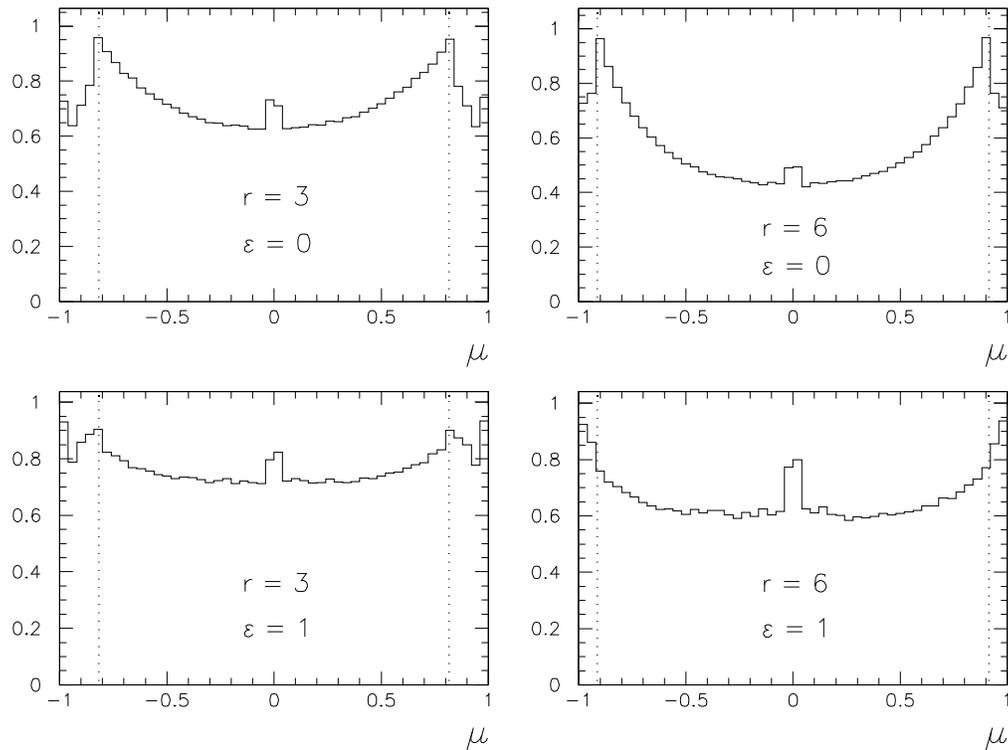


Abbildung 3.20: Vergleich der Pitchwinkelverteilungen im Oberlauf-Ruhesystem direkt an der Stoßfront, bei verschiedenen Kompressionsverhältnissen r und Korrelationsparametern ϵ . Die entsprechenden Impulsspektrum sind in den Abbildungen 3.15 und 3.17 gezeigt. Vergleiche Abb. 3.10 zur Bedeutung der gepunkteten Linien. Die Normierung ist willkürlich.

Spektralindex erst bei dem etwa 10fachen des Injektionsimpulses ein. Für kleinere Impulse ist das Spektrum zunächst noch flacher. In Abb. 3.19 sind nun diese Spektralindizes bei hohen Impulsen jeweils für verschiedene Kompressionsverhältnisse dargestellt. Die Punkte stellen dabei jeweils die Indizes für *sub*-diffundierende Teilchen dar, während die Sterne die Indizes für diffundierende Teilchen markieren. Die durchgezogene Linie zeigt das analytische Ergebnis (3.44), das von Kirk et al. (1996) unter der Voraussetzung einer isotropen Pitchwinkelverteilung erhalten wurde, und die gestrichelte Linie zeigt das Ergebnis für klassische Diffusion unter derselben Voraussetzung (siehe Kap. 3.1.1). Während die ständige Pitchwinkelstreuung für eine Isotropisierung der Verteilung sorgt, wird durch die Stoßfront eine Anisotropie eingeführt. Im Gegensatz zu parallelen Stoßfronten, bei denen sich die Richtung der Teilchenbewegung zwischen zwei Stoßkreuzungen (in der Regel) umkehren muß, was durch mehrfache Streuung vollzogen wird, ist dies im Fall der hier betrachteten hauptsächlich senkrechten Stoßfronten nicht gegeben. Die Auswirkungen der Stoßfront auf die Pitchwinkelverteilung können hier

also im Prinzip zu einer Anisotropie an der Stoßfront führen. Dies gilt natürlich um so mehr, je stärker der Stoß ist. In Abb. 3.20 sind die Pitchwinkelverteilungen dargestellt, wie sie bei der Simulation der Impulsspektren erhalten wurden.

Betrachten wir zunächst die oberen Verteilungen der Abb. 3.20, die für $\epsilon = 0$ und damit *sub*-diffusive Teilchenbewegung erhalten wurden. Während bei einem Stoß mit $r = 3$ die Pitchwinkelverteilung noch weitgehend isotrop ist, so ist diese für $r = 6$ stark anisotrop. Bei einer stark anisotropen Pitchwinkelverteilung, die mit steigendem Kompressionsverhältnis gegeben ist, kann eine Übereinstimmung mit dem analytischen Ergebnis nicht mehr erwartet werden. Wie schon in Abb. 3.15 deutlich wird, ist für Kompressionsverhältnisse von $r \leq 3$ die Bestimmung des Spektralindex besonders im *sub*-diffusiven Fall mit größer werdenden systematischen Fehlern behaftet. Bei den in diesem Bereich sehr steilen Spektren stellen sich große statistische Fluktuationen schon ab einem Impuls von dem 100fachen des Injektionsimpulses p_0 ein. Andererseits existiert (wie in Zusammenhang mit Abb. 3.18 besprochen) ein reines Potenzgesetz erst ab $p \gtrsim 10p_0$. Diese Grenzen rücken für kleiner werdendes r immer weiter zusammen. So daß schon für $r = 3$ der daraus entstehende Fehler für s etwa 4% beträgt und sehr schnell größer wird. Für alle anderen in Abb. 3.19 angegebenen Spektralindizes kann diese soeben besprochene Unsicherheit, zusammen mit dem reinen statistischen Fehler, mit etwa 1% abgeschätzt werden. Die Abweichungen von dem theoretischen Verlauf für *sub*-Diffusion liegen daher mit ca. 5% für $r \leq 3$ innerhalb der Fehlergrenzen der Monte-Carlo-Simulation, während für größeres Kompressionsverhältnis die Abweichung von bis zu 15% bei $r = 6$ signifikant ist. Bei diesem Wert ist aber ebenfalls eine starke Anisotropie in der Pitchwinkelverteilung gegeben (siehe Abb. 3.20 für $\epsilon = 0$ und $r = 6$).

Die Pitchwinkelverteilungen der Abb. 3.20 für diffusive Teilchenbewegung mit $\epsilon = 1$ zeigen auch für große Kompressionsverhältnisse keine besonders starke Anisotropie. Bei einem Vergleich der *Skalen* der Abbildungen 3.7 mit 3.8 und auch 3.9 mit 3.12 wird deutlich, daß in diesem Fall die Mehrheit der Teilchen sich bei ihrer Bewegung senkrecht zum Stoß weiter von diesem entfernt als bei *sub*-Diffusion. Dies ermöglicht eine effektivere Isotropisierung der Pitchwinkel an der Stoßfront selbst. Bei der Betrachtung der Skalen auf die oben verwiesen wurde, muß jedoch berücksichtigt werden, daß der Weg den die Teilchen zwischen zwei Stoßbegegnungen zurücklegen viel kleiner sein kann. Die Bewegung zwischen aufeinanderfolgenden Stoßkreuzungen kann daher durch die Linearität der Magnetfeldabschnitte auf der Skala Δz beeinflusst sein, d.h. daß auf dieser Skala der Transport durch einen anderen Diffusionskoeffizienten beschrieben wird. Die Abweichungen der Monte-Carlo-Simulationen (gekennzeichnet durch Sterne in Abb. 3.19) vom theoretischen Spektralindex für klassische Diffusion (gestrichelte Linie) betragen jedoch für den gesamten dargestellten Bereich maximal 5%.

3.5 Diskussion und Ausblick

Es wurde eine Monte-Carlo-Methode für die Simulation von Teilchentransport und Beschleunigung unter verschiedenen Magnetfeldkonstellationen vorgestellt. Diese Methode, die auf einer Beschreibung der Teilchenbewegung und des Magnetfeldes durch endliche (zufällige) Schritte beruht, ist geeignet, *sub*-diffusives Transportverhalten zu simulieren. Dies wurde durch Simulation des Teilchenpropagators $P(\xi_s)$ und der (eindimensionalen) räumlichen Verteilung $n(\xi_s)$ der Teilchen gezeigt. Die explizite Form dieses Propagators für $r \neq 1$ und der Dichteverteilung konnten mit dieser Methode erhalten werden.

Durch eine Abänderung der Magnetfeldgeometrie konnte die Methode auch auf schräge Stoßfronten mit konstantem Neigungswinkel angewendet werden. In diesem Fall konnten die Ergebnisse für den Spektralindex mit der Literatur verglichen werden, wobei sich eine gute Übereinstimmung ergab. In jüngerer Zeit wurden in der Literatur relativistische Stoßfronten bei Störungen des Magnetfeldes mit endlicher Amplitude diskutiert. Die Ergebnisse bezüglich des Spektralindex von Ostrowski (1993) und Ballard & Heavens (1992) widersprechen sich dabei teilweise signifikant. Es ist denkbar, die hier dargestellte Methode auf dieses Problem anzuwenden.

Schließlich wurden die Ergebnisse der Spektren in Abhängigkeit vom Kompressionsverhältnis vorgestellt. Es wurde dabei direkt die Wirkung der Korrelation der Teilchen an das Magnetfeld auf das Teilchenspektrum untersucht. Dabei hat sich gezeigt, daß bei *sub*-diffusivem Transport, bei dem die Teilchen strikt an das stochastische Magnetfeld gebunden sind, das Spektrum signifikant steiler ist als bei Diffusion der Teilchen. Dies hat seine Ursache in der größeren Effektivität des stochastischen Magnetfeldes die Teilchen in den Unterlauf mitzuführen. Dieser Effekt wurde von Kirk et al. (1996) analytisch berechnet. Mit diesen Ergebnissen wurde der Spektralindex schließlich verglichen. Dabei stellten sich vor allem für große Kompressionsverhältnisse Abweichungen ein, die den vorhergesagten Effekt allerdings noch übertroffen haben. Die analytischen Ergebnisse waren unter der Annahme von Isotropie bezüglich der Pitchwinkelverteilung abgeleitet worden, die für große Kompressionsverhältnisse nicht mehr gegeben ist. Für starke Stoßfronten mit $r \lesssim 4$ betragen die Abweichungen vom analytisch berechneten Spektralindex für beide Arten der Teilchenbewegung jeweils nur etwa 5%.

Um die Ergebnisse auf konkrete physikalische Situationen anzuwenden, muß jeweils untersucht werden, auf welchen Skalen die hier gemachte Näherung des linearen Feldabschnittes Gültigkeit hat. Dazu ist ein konkretes Modell der Störungen der Magnetfeldlinien zu berücksichtigen (siehe z.B. Jokipii 1971). Daraus ergibt sich weiterhin eine Abschätzung für die Korrelation zwischen Teilchen und Magnetfeldlinie. Die hier betrachteten Fälle der unbegrenzten Korrelation ($\epsilon = 0$) und der maximalen Dekorrelation ($\epsilon = 1$) stellen dabei zwei Extremfälle dar.

Um noch detailliertere Untersuchungen des Spektralindex insbesondere in Abhängigkeit von der Stoßgeschwindigkeit und der Fluktuationen des magnetischen Feldes vorzunehmen, könnte die hier vorgestellte Methode möglicherweise noch in der statistischen Aussagekraft verbessert werden. Dabei könnte eine sog. *Splitting*-Methode implementiert werden, wie sie von Kirk & Schneider (1987) benutzt wurde. Im Fall von *sub*-Diffusion wurden sehr steile Spektren erhalten, die erst nach viel höheren Impulsen als dem Injektionsimpuls ein reines Potenzgesetz zeigen. Die *Splitting*-Methode böte die Möglichkeit, auch bei sehr steilen Spektren statistisch genaue Aussagen zu machen.

Kapitel 4

Zusammenfassung

Das Transportverhalten von Teilchen im Phasenraum wurde in Hinblick auf astrophysikalische Anwendungen dargestellt, insbesondere mit dem Ziel der Untersuchung von hochenergetischer nicht-thermischer Strahlung. Sowohl für Photonen als auch für geladene Teilchen bedeutet dies, daß die Wechselwirkung der Teilchen untereinander vernachlässigbar ist. Von besonderer Bedeutung für die Beschleunigung der Teilchen ist jedoch die Verknüpfung des Transportes im Konfigurations- und Impulsraum, welche zunächst im Rahmen des klassischen Transportverhaltens für Photonen und geladene Teilchen dargestellt wurde. In Supernova-Überresten, in denen hochenergetische geladene Teilchen erzeugt werden, herrschen jedoch in manchen Gebieten Bedingungen vor, in denen der Transport auf Grund eines stochastischen Magnetfeldes anomales Verhalten zeigt. Insbesondere für diesen Fall wurde eine Transportgleichung und deren Lösung angegeben.

Für Photonen ist die relevante Transportgleichung für den o.g. Anwendungsbereich die Boltzmann-Gleichung. Auf deren Grundlage wurde das Problem der Erzeugung hochenergetischer Photonen durch Comptonisierung in einer Plasmacheibe formuliert. Die entsprechende Integro-Differential-Gleichung wurde semi-analytisch gelöst. Dabei wurde die Phasenfunktion und die Winkelabhängigkeit der spezifischen Intensität in Legendre-Polynome entwickelt. Der Satz daraus entstehender gekoppelter Differentialgleichungen für die Ortsabhängigkeit der Intensität wurde durch Entwickeln in Tschebyscheff-Polynome auf ein algebraisches Eigenwertproblem zurückgeführt. Dieses konnte mit geringem Aufwand numerisch gelöst werden. Dabei wurde der Spektralindex des Potenzgesetz-Spektrums comptonisierter Strahlung erhalten, wie auch deren Winkel- und Ortsverteilung. Im Gegensatz zu früheren Arbeiten mußten dabei im Prinzip keine Einschränkungen an die Größe des Energieübertrages der Elektronen auf die Photonen, die Winkelabhängigkeit der Quellfunktion oder an die optische Tiefe der Plasmacheibe gestellt werden. Während für große optische Tiefen die Isotropie der Quellfunktion bestätigt werden konnte und die hier erhaltenen Ergebnisse für den

Spektralindex in sehr guter Übereinstimmung mit den vorausgegangenen Arbeiten sind (speziell Titarchuk & Lyubarskij 1995), so konnte für kleine optische Tiefen die tatsächliche Anisotropie und die Auswirkung auf den Spektralindex bestimmt werden.

Die Intensität der Strahlung, die eine optisch dünne Plasmascheibe verläßt, zeigt eine starke Kollimation in Richtung der Oberfläche, die von verschiedenen Autoren vorhergesagt worden ist (siehe z.B. Haardt & Maraschi 1993 und Titarchuk 1994). Die Intensitätsverteilung wurde als Entwicklung in den o.g. Polynomen berechnet, die durch den großen Teil der analytischen Behandlung des Problems bis zu ausreichend großer Ordnung und damit hoher Konvergenz erhalten wurde. Die einzige Einschränkung an die Genauigkeit der Ergebnisse stellt daher die Näherung durch die Mittelung über die Polarisationsrichtungen dar, wie sie auch von den bis heute vorgestellten Monte-Carlo-Methoden benutzt wird, die dadurch mit den hier angegebenen Ergebnissen verglichen werden können. Die Erweiterung auf eine Transportgleichung für polarisierte Strahlung ist bei der hier dargestellten Methode prinzipiell möglich.

Für geladene Teilchen wurde die Beschleunigung unter dem Einfluß stochastischer Magnetfelder untersucht, die zu einem anomalen Transportverhalten führen. In Supernova-Überresten gibt es Gebiete, in denen das stochastische Magnetfeld hauptsächlich senkrecht zur Stoßnormalen verläuft. Für die wiederholte Stoßkreuzung spielt gerade der anomale Transport senkrecht zur Haupttrichtung des Magnetfeldes die entscheidende Rolle. Zur Untersuchung des Transportverhaltens und der Auswirkungen auf das Spektrum der bei dieser Konstellation durch die Stoßfront beschleunigten geladenen Teilchen wurde eine Monte-Carlo-Methode verwendet. Zunächst wurde die hier dargestellte Simulationmethode durch eine kleine Abänderung auch auf schräge nicht-stochastische Stoßfronten angewendet. Die erhaltenen Spektralindizes für verschiedene Neigungswinkel bei nicht-relativistischen Stoßgeschwindigkeiten wurden mit den unter denselben Voraussetzungen erhaltenen Ergebnissen einer semi-analytischen Methode von Kirk & Heavens (1989) verglichen, wobei sich eine sehr gute Übereinstimmung ergab. Danach wurde ohne expliziten Rückgriff auf die Transportgleichungen bzw. deren Lösungen die Bewegung von Teilchen in einem Magnetfeld mit stochastischer Komponente simuliert. Im Prinzip wurden dabei im Plasma eingefrorene Magnetfeldlinien an äquidistanten Stützstellen entlang der Hauptfeldrichtung generiert, auf denen die Gyrationen der Teilchen sich diffusiv unter dem Einfluß von Pitchwinkelstreuung bewegen. Das Plasma wurde dabei fortwährend über die Stoßfront transportiert. Unter Benutzung der adiabatischen Invarianten wurde dann die Änderung insbesondere des Impulses auf der Grundlage des sog. Stoß-Drift-Prozesses bei jeder Stoßkreuzung berechnet.

Bei einem kontinuierlichen Plasmafluß, d.h. für ein auch im Unterlauf unkomprimiertes Plasma, kann der vollständige Propagator, der die Ausbreitung eines

Teilchenpaketes beschreibt, analytisch berechnet werden. Damit kann wiederum an ausgezeichneten Stellen auch das Dichteprofil fortwährend injizierter Teilchen bestimmt werden. Es zeigte sich eine sehr gute Übereinstimmung dieser analytischen Ergebnisse mit den Resultaten der Monte-Carlo-Simulation, die darüber hinaus auch den Propagator und das Dichteprofil bei komprimiertem Plasma gezeigt haben. Insbesondere die gegenüber dem klassischen Transport reduzierte Teilchendichte an der Stelle der Injektion, die entscheidend für das Impulsspektrum der beschleunigten Teilchen ist, konnte quantitativ bestätigt werden.

Im Fall einer im Stoßsystem isotropen Pitchwinkelverteilung hängt der Spektralindex der beschleunigten Teilchen nur von dem Verhältnis der Dichte des Plasmas am Stoß zu derjenigen weit im Unterlauf und dem Kompressionsverhältnis ab. Es stellt sich daher bei anomalem Transport durch die Reduzierung der Dichte an der Stoßfront ein steileres Spektrum als bei klassischem diffusiven Transport ein (siehe Kirk et al. 1996). Die Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulation haben dieses Verhalten sehr deutlich gezeigt. Darüber hinaus wurde die Annahme der isotropen Pitchwinkelverteilung fallen gelassen, und diese explizit berechnet. Dabei ergab sich insbesondere für *sub*-diffusiven Transport mit zunehmendem Kompressionsverhältnis eine anisotrope Pitchwinkelverteilung. Auf diese Ursache konnten die abweichenden Werte der Spektralindizes vom analytischen Ergebnis zurückgeführt werden. Die hier bestimmten Spektralindizes zeigen über einen großen Bereich des Kompressionsverhältnisses, im Vergleich zum klassischen diffusiven Transport, ein signifikant steileres Spektrum für Teilchen, die *sub*-diffusivem Transport unterliegen.

Anhang A

Photonen–Diffusion in einer Scheibe

Wir betrachten die Strahlungs–Transportgleichung mit anisotroper Streuung in einer homogenen Scheibe, die den Raum $0 < z < D$ bedeckt (vgl. Abb. 2.1, bei um τ_0 entlang z verschobener Scheibe. Es gelte $D := 2\tau_0$). Zusammen mit der Randbedingung, bei welcher Teilchen unter dem Winkel $\theta = \arccos \mu_0$ bei $z = 0$ in die Scheibe eindringen, lautet die Boltzmann–Gleichung für Teilchen bei einer bestimmten Energie (siehe Mahan 1995, Gln. 4 – 6)

$$\mu \frac{\partial}{\partial z} f(z, \mu) + f(z, \mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu' f(z, \mu') + \frac{3}{2} \mu g_1 \int_{-1}^1 d\mu' \mu' f(z, \mu'), \quad (\text{A.1})$$

$$\left. \begin{aligned} f(0, \mu) &= 2 \delta(\mu - \mu_0) \\ f(D, -\mu) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{für } \mu > 0. \quad (\text{A.2})$$

Für dicke Scheiben ($D \gg 1$) hat Mahan (1995) eine Lösung angegeben, welche nur für senkrechten Eintritt ($\mu_0 = 1$) in die Scheibe gültig ist. Eine Verallgemeinerung auf beliebiges μ ist von Interesse, wenn die Teilchen, die in die Scheibe eindringen, z.B. von einer Punktquelle bei endlichem Abstand ausgesendet wurden oder vor dem Eintritt einer diffusiven Bewegung unterlagen. Diese Probleme verlangen eine Integration über den Bereich aller möglichen Winkel. Selbst für einen kollimierten Strahl von Teilchen ist die experimentelle Situation im allgemeinen so, daß dieser die Oberfläche nicht entlang der Normalen trifft. Mahans Methode ist auf diesen Fall nicht zu verallgemeinern, da die dort angegebene Gl. (78) nicht für $\mu_0 \neq 1$ gültig ist, da in diesem Fall $A^{-1}(\mu_0) \neq 0$ gilt. Es ist jedoch möglich, unter Benutzung von Orthogonalitätsrelationen, die von McCormick & Kušcer (1965; 1966) angegeben wurden, dieses Problem für Randbedingungen zu lösen,

bei denen die Teilchen unter beliebigen Winkeln in die Scheibe eindringen. Außerdem kann gezeigt werden, wie die Einschränkung auf dicke Scheiben aufgehoben werden kann (vgl. Gieseler & Kirk 1997a).

Die allgemeine Lösung der Gl. (A.1) ist (vgl. Mahan 1995, Gln. 88 und 89)

$$\begin{aligned}
 f(z, \mu) &= a_s + 3j[\mu - z(1 - g_1)] \\
 &+ \int_0^1 d\nu \left\{ \frac{M_L(\nu)}{\nu - \mu} e^{-z/\nu} + \delta(\nu - \mu) A(\nu) M_L(\nu) e^{-z/\nu} \right\} \\
 &+ \int_{-1}^0 d\nu \left\{ \frac{M_R(\nu)}{\nu - \mu} e^{(D-z)/\nu} + \delta(\nu - \mu) A(\nu) M_R(\nu) e^{(D-z)/\nu} \right\}, \quad (\text{A.3})
 \end{aligned}$$

wobei die Konstanten a_s und j sowie die Funktionen $M_L(\nu)$ und $M_R(\nu)$ durch die Randbedingungen zu bestimmen sind. Die explizite Form der Funktion $A(\mu)$ ist (vgl. Mahan 1995, Gl. 29)

$$A(\mu) = -2 \frac{Q_1(\mu)}{P_1(\mu)} = \frac{2}{\mu} (1 - \mu \operatorname{arctanh} \mu) = \frac{2}{\mu} \lambda(\mu), \quad (\text{A.4})$$

wobei $\lambda(\mu)$ von McCormick & Kuščer (1965)¹ definiert wurde. Um die Orthogonalitätsrelationen anwenden zu können, ist es notwendig, die Lösung in Form der von McCormick & Kuščer (1965)² benutzten Eigenfunktionen zu schreiben:

$$\phi_\nu(\mu) = \frac{\nu}{2} \text{P} \frac{1}{\nu - \mu} + \lambda(\nu) \delta(\nu - \mu). \quad (\text{A.5})$$

Diese haben die Eigenschaft

$$\phi_{-\nu}(\mu) = \phi_\nu(-\mu). \quad (\text{A.6})$$

Gleichung (A.3) kann somit geschrieben werden als

$$\begin{aligned}
 f(z, \mu) &= a_s + 3j[\mu - z(1 - g_1)] \\
 &+ \int_0^1 d\nu \tilde{M}_L(\nu) \phi_\nu(\mu) e^{-z/\nu} + \int_0^1 d\nu \tilde{M}_R(-\nu) \phi_{-\nu}(\mu) e^{(z-D)/\nu}, \quad (\text{A.7})
 \end{aligned}$$

wobei wir den Faktor $2/\mu$ in die Definition der Funktionen $\tilde{M}_R(\mu)$ und $\tilde{M}_L(\mu)$ gemäß

$$\tilde{M}_R(\mu) := \frac{2}{\mu} M_R(\mu), \quad \tilde{M}_L(\mu) := \frac{2}{\mu} M_L(\mu), \quad (\text{A.8})$$

¹Gl. (5), wobei für den hier betrachteten Fall der Streuung ohne Absorption der Grenzfall $c \rightarrow 1$ benutzt werden muß.

²Gl. (4) und Case & Zweifel (1967), Kapitel 6.9.

absorbiert haben. Die Randbedingungen (Gl. A.2) werden dann zu

$$2\delta(\mu - \mu_0) = a_s + 3j\mu + \int_0^1 d\nu \tilde{M}_L(\nu) \phi_\nu(\mu) + \int_0^1 d\nu \tilde{M}_R(-\nu) \phi_{-\nu}(\mu) e^{-D/\nu}, \quad (\text{A.9})$$

$$0 = a_s - 3j\mu - 3jD(1 - g_1) + \int_0^1 d\nu \tilde{M}_L(\nu) \phi_{-\nu}(\mu) e^{-D/\nu} + \int_0^1 d\nu \tilde{M}_R(-\nu) \phi_\nu(\mu). \quad (\text{A.10})$$

Definieren wir

$$B_\pm(\nu) := \frac{1}{2} [\tilde{M}_L(\nu) \pm \tilde{M}_R(-\nu)] \quad (\text{A.11})$$

und addieren sowie subtrahieren wir Gln. (A.9) und (A.10), so führt das auf

$$\delta(\mu - \mu_0) = \left\{ \begin{array}{c} a_s \\ 3j\mu \end{array} \right\} \mp \frac{3}{2} jD(1 - g_1) + \int_0^1 B_\pm(\nu) \phi_\nu(\mu) d\nu \pm \int_0^1 B_\pm(\nu) e^{-D/\nu} \phi_{-\nu}(\mu) d\nu. \quad (\text{A.12})$$

Zur Anwendung der Orthogonalitätsrelationen müssen diese Gleichungen mit einer Gewichtsfunktion multipliziert werden. Diese Funktion wird hier und in McCormick & Kuščer (1965) mit $\gamma(\mu)$ bezeichnet und ist in Beziehung, aber nicht identisch, mit der Funktion $\gamma(\mu)$, welche von Mahan (1995) benutzt wurde, und ist gegeben durch³

$$\gamma(\mu) = \frac{3}{2} \frac{\mu}{X(-\mu)}; \quad 0 \leq \mu \leq 1. \quad (\text{A.13})$$

Die Funktion $X(-\mu)$ kann durch die Ambartsumian Funktion⁴ $\psi(\mu)$ oder die Chandrasekhar H -Funktion⁵ ausgedrückt werden. Im Grenzfall $c \rightarrow 1$ sind diese Beziehungen gegeben durch (siehe Case & Zweifel 1967; McCormick & Mendelson 1964)

$$X(-\mu) = \frac{\sqrt{3}}{\psi(\mu)} = \frac{\sqrt{3}}{H(\mu)}. \quad (\text{A.14})$$

Case & Zweifel (1967) haben sowohl Tabellen mit $X(-\mu)$ für $0 \leq \mu \leq 1$ angegeben sowie eine Repräsentation, die sich für die direkte numerische Bestimmung

³McCormick & Kuščer (1965), Gl. (15), im Grenzfall $c \rightarrow 1$.

⁴Mahan (1995), Gl. (7).

⁵Chandrasekhar (1960), wobei wir die Definition von H für isotrope Streuung benutzen.

eignet (siehe dort Seite 130, Gl. 39):

$$X(-\mu) = \exp \left\{ \frac{-c}{2} \int_0^1 dx \frac{[1 + cx^2/(1-x^2)] \ln(x+\mu)}{[1 - cx \operatorname{arctanh}(x)]^2 + (\pi cx/2)^2} \right\}, \quad (\text{A.15})$$

wobei c die Albedo für eine einzelne Streuung darstellt, welche in dem hier betrachteten Fall gleich 1 ist. Wir multiplizieren nun Gl. (A.12) mit $\gamma(\mu)$ und integrieren über μ von 0 bis 1. Die Integrale über μ können mit Hilfe von Relationen gelöst werden, die von McCormick & Kuščer (1965) angegeben wurden (die Nummern über den folgenden Gleichheitszeichen stehen für die entsprechenden Gleichungsnummern):

$$\int_0^1 \gamma(\mu) d\mu \stackrel{16}{=} \gamma_0 \stackrel{63}{=} 1, \quad (\text{A.16})$$

$$\int_0^1 \gamma(\mu) \mu d\mu \stackrel{16}{=} \gamma_1 \stackrel{25}{=} \bar{\nu} \gamma_0 \stackrel{63}{=} \bar{\nu} \stackrel{83}{=} z_0|_{b=0} = 0.7104, \quad (\text{A.17})$$

$$\int_0^1 \phi_\nu(\mu) \gamma(\mu) d\mu \stackrel{69}{=} 0, \quad (\text{A.18})$$

$$\int_0^1 \phi_{-\nu}(\mu) \gamma(\mu) d\mu \stackrel{70}{=} \frac{3}{4} \frac{\nu^2}{\gamma(\nu)} = \frac{\nu}{2} X(-\nu). \quad (\text{A.19})$$

Bezeichnen wir den Extrapolationsabstand des Milne-Problems im Fall der isotropen Streuung $z_0|_{b=0} = 0.7104$ mit z_0 , so kann Gl. (A.12) unter Benutzung der obigen Beziehungen geschrieben werden als

$$\frac{3}{2} \frac{\mu_0}{X(-\mu_0)} = \left\{ \begin{array}{c} a_s \\ 3jz_0 \end{array} \right\} \mp \frac{3}{2} j D (1 - g_1) \pm \int_0^1 B_\pm(\nu) e^{-D/\nu} \frac{\nu}{2} X(-\nu) d\nu. \quad (\text{A.20})$$

Die Funktionen $B_\pm(\mu)$ können durch Multiplikation der Gl. (A.12) mit $\phi_{\nu'}(\mu) \gamma(\mu)$ und Integration über μ von 0 bis 1 berechnet werden. Unter Benutzung der Orthogonalitätsrelationen⁶ findet man inhomogene Fredholm-Gleichungen für $B_\pm(\mu)$, welche durch Neumann-Iteration⁷ gelöst werden können. In dem Fall der Approximation für eine dicke Scheibe, wobei Terme der Größenordnung e^{-D} vernachlässigt werden können, sind diese Fredholm-Gleichungen leicht zu lösen. Gleichung (A.20) für a_s und j ist dann trivial und unabhängig von $B_\pm(\mu)$:

$$\frac{3}{2} \frac{\mu_0}{X(-\mu_0)} = \left\{ \begin{array}{c} a_s \\ 3jz_0 \end{array} \right\} \mp \frac{3}{2} j D (1 - g_1). \quad (\text{A.21})$$

⁶McCormick & Kuščer (1965), Gln. (64) und (65).

⁷McCormick & Mendelson (1964) behandeln den Fall der isotropen Streuung.

Sind die Funktionen $B_{\pm}(\mu)$ und daher $M_L(\mu)$ und $M_R(\mu)$ bestimmt, so erhält man durch Gl. (A.21) die Koeffizienten a_s und j und damit die Dichte $f(\mu, z)$. Es ist im Prinzip möglich, diese Methode auch unter der Berücksichtigung von Termen höherer Ordnung $\propto e^{-D}$ zu benutzen, jedoch werden die Gleichungen dann sehr kompliziert.

Die Gleichungen (A.21) erlauben es uns, den Transmissions-Koeffizienten T direkt zu bestimmen. In Abhängigkeit von der Funktion X erhalten wir:

$$T = j = \frac{\mu_0}{X(-\mu_0)} \frac{1}{D(1 - g_1) + 2z_0}. \quad (\text{A.22})$$

Dies ist eine Verallgemeinerung des Ergebnisses von Mahan (1995) (Gl. 110) auf beliebige μ_0 ($0 \leq \mu_0 \leq 1$) und stimmt mit diesem für $\mu_0 = 1$ überein. Im Fall der isotropen Streuung, $g_1 = 0$, ist Gl. (A.22) in Übereinstimmung mit dem Ergebnis von McCormick & Mendelson (1964) (Gl. 35).

Schließlich sei noch angemerkt, daß McCormick & Kušcer (1966) auch Orthogonalitätsrelationen gefunden haben, die es ermöglichen, Halbraum-Transportprobleme mit höheren Ordnungen der Anisotropie zu lösen.

Anhang B

Integrale der Phasenfunktion zur Comptonisierung

Die Winkelintegration der Phasenfunktion im Comptonisierungsproblem (Gl. 2.37) besitzt als Entwicklung in Legendre–Polynome eine analytische Lösung. Wie in Kapitel 2.5 gezeigt und diskutiert wurde, kann die Entwicklung der Phasenfunktion frühestens nach dem dritten Glied abgebrochen werden. Es hat sich herausgestellt, daß die Ergebnisse nicht signifikant von den Gliedern höherer Ordnung abhängen. Daher sollen hier die Integrale, die zur Berechnung der Entwicklungskoeffizienten $\omega_i(\alpha, \Theta)$ für $i = 0, 1, 2$ notwendig sind, analytisch angegeben werden. In den Grenzfällen $\Theta \ll 1$ (Kap. 2.4.1) und $\Theta \gg 1$ (Kap. 2.4.2) können die Entwicklungskoeffizienten bis zur beliebigen Ordnung in v bzw. $1/\gamma$ *analytisch* als Funktion von α aus den hier angegebenen Funktionen berechnet werden. Für gegebenes Θ sind dann noch Momente der Elektronenverteilungsfunktion $f(v)$ numerisch zu berechnen.

Nach Ausführung der Integration über den Azimut ($d\tilde{\phi}'$ und $d\tilde{\phi}'_1$), kann $\hat{\omega}_i(\alpha, \gamma)$ (Gl. 2.37) auf Produkte zweier Integrationen der Art

$$\mathcal{I}_i(\alpha) := \int_{-1}^1 (1+vx)^\alpha x^i dx \quad (\text{B.1})$$

zurückgeführt werden (mit $x = \tilde{\mu}'$ oder $\tilde{\mu}'_1$). Wir werden dieses Integral für $i = 0, 1, 2, 3, 4$ benötigen (siehe z.B. Gradshteyn & Ryzhik 1994):

$$\mathcal{I}_0(\alpha) = \frac{(1+v)^{\alpha+1} - (1-v)^{\alpha+1}}{v(\alpha+1)}, \quad (\text{B.2})$$

$$\mathcal{I}_1(\alpha) = -\frac{(1+v)^{\alpha+1} - (1-v)^{\alpha+1}}{v^2(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{(1+v)^{\alpha+1} + (1-v)^{\alpha+1}}{v(\alpha+2)}, \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2(\alpha) &= 2 \frac{(1+v)^{\alpha+1} - (1-v)^{\alpha+1}}{v^3(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} - 2 \frac{(1+v)^{\alpha+1} + (1-v)^{\alpha+1}}{v^2(\alpha+2)(\alpha+3)} \\ &\quad + \frac{(1+v)^{\alpha+1} - (1-v)^{\alpha+1}}{v(\alpha+3)}, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_3(\alpha) &= -6 \frac{(1+v)^\alpha - (1-v)^\alpha}{v^4(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)} \\ &\quad + 6\alpha \frac{(1+v)^\alpha + (1-v)^\alpha}{v^3(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)} \\ &\quad - 3\alpha \frac{(1+v)^\alpha - (1-v)^\alpha}{v^2(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)} + \alpha \frac{(1+v)^\alpha + (1-v)^\alpha}{v(\alpha+3)(\alpha+4)} \\ &\quad + \frac{(1+v)^\alpha - (1-v)^\alpha}{(\alpha+4)}, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_4(\alpha) &= 24 \frac{(1+v)^{\alpha+1} - (1-v)^{\alpha+1}}{v^5(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)(\alpha+5)} \\ &\quad - 24 \frac{(1+v)^{\alpha+1} + (1-v)^{\alpha+1}}{v^4(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)(\alpha+5)} \\ &\quad + 12 \frac{(1+v)^{\alpha+1} - (1-v)^{\alpha+1}}{v^3(\alpha+3)(\alpha+4)(\alpha+5)} - 4 \frac{(1+v)^{\alpha+1} + (1-v)^{\alpha+1}}{v^2(\alpha+4)(\alpha+5)} \\ &\quad + \frac{(1+v)^{\alpha+1} - (1-v)^{\alpha+1}}{v(\alpha+5)}. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Weiterhin kürzen wir die vorkommenden Kombinationen bezüglich des Argumentes α ab:

$$I_{i,j} := \mathcal{I}_i(\alpha) \mathcal{I}_j(-\alpha-3), \quad (\text{B.7})$$

$$J_{i,j} := \mathcal{I}_i(\alpha-1) \mathcal{I}_j(-\alpha-4), \quad (\text{B.8})$$

$$K_{i,j} := \mathcal{I}_i(\alpha-2) \mathcal{I}_j(-\alpha-5). \quad (\text{B.9})$$

Damit ergeben sich die Winkelintegrationen der ersten drei Entwicklungskoeffizienten der Phasenfunktion (Gl. 2.37) zu

$$\hat{\omega}_0(\alpha, \gamma) = \frac{1}{8\gamma^2} [3I_{0,0} + 3I_{2,2} - (I_{2,0} + I_{0,2})], \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_1(\alpha, \gamma) &= 3\hat{\omega}_0(\alpha, \gamma) - \frac{3}{8\gamma^4} [3J_{0,0} - 5J_{1,1} + 3J_{2,2} - 5J_{3,3} \\ &\quad - (J_{2,0} + J_{0,2}) + 3(J_{3,1} + J_{1,3})], \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{aligned}
\hat{\omega}_2(\alpha, \gamma) = & -10\hat{\omega}_0(\alpha, \gamma) + 5\hat{\omega}_1(\alpha, \gamma) + \frac{15}{64\gamma^6} [19K_{0,0} - 40K_{1,1} \\
& + 60K_{2,2} - 40K_{3,3} + 35K_{4,4} - 14(K_{2,0} + K_{0,2}) \\
& + 3(K_{4,0} + K_{0,4}) + 24(K_{3,1} + K_{1,3}) - 30(K_{4,2} + K_{2,4})] . \quad (\text{B.12})
\end{aligned}$$

Der isotrope Anteil (Gl. B.10) ist in Übereinstimmung mit Titarchuk & Lyubarskij (1995), Gl. (A12).

Literaturverzeichnis

- Achterberg A., Ball L., 1994, *A&A* **285**, 687
- Axford W. I., Leer E., Skadron G., 1977, Proc. 15th. Int. Cosmic Ray Conf., Plodiv, **11**, 132
- Baade W., Zwicky F., 1934, *Phys. Rev.* **45**, 138
- Balescu R., 1988, *Transport Processes in Plasmas*, North-Holland, Amsterdam
- Balescu R., 1995, *Phys. Rev. E* **51**, 4807
- Balescu R., Wang H.-D., Misguich J. H., 1994, *Phys. Plasmas* **1**, 3826
- Ballard K. R., Heavens A. F., 1992, *MNRAS* **259**, 89
- Barge P., Millet J., Pellat R., 1984, *ApJ* **284**, 817
- Begelman M. C., Kirk J. G., 1990, *ApJ* **353**, 66
- Bell A. R., 1978, *MNRAS* **182**, 147
- Berezinskiĭ V. S., Bulanov S. V., Dogiel V. A., Ginzburg V. L., Ptuskin V. S., 1990, *Astrophysics of cosmic rays*, North-Holland, Amsterdam
- Blandford R. D., Eichler D., 1987, *Physics Reports* **154**, 1
- Blandford R. D., Ostriker J. P., 1978, *ApJ* **221**, L29
- Case K. M., Zweifel P. F., 1967, *Linear Transport Theory*, Addison-Wesley, London
- Cercignani C., 1988, *The Boltzmann Equation and Its Applications*, Springer-Verlag, Berlin
- Chandrasekhar S., 1960, *Radiative Transfer*, Dover Publications, New York
- Chuvilgin L. G., Ptuskin V. S., 1993, *A&A* **279**, 278

- Cooper G., 1971, *Phys. Rev. D* **3**, 2312
- Decker R. B., 1988, *Space Sc. Rev.* **48**, 195
- Dendy R. O., Duffy P., Gallant Y. A., Kirk J. G., 1995, *Proc. 24th. Int. Cosmic Ray Conf., Rome*, **3**, 221
- Drury L. O'C., 1983, *Rep. Prog. Phys.* **46**, 973
- Duderstadt J. J., Martin W. R., 1979, *Transport Theory*, John Wiley & Sons, New York
- Duffy P., Kirk J. G., Gallant Y. A., Dendy R. O., 1995, *A&A* **302**, L21
- Ebisawa K., Titarchuk L., Chakrabarti S. K., 1996, *Publ. Astron. Soc. Japan* **48**, 59
- Ellison D. C., Baring M. G., Jones F. C., 1996, *ApJ* **473**, 1029
- Fermi E., 1949, *Phys. Rev.* **75**, 1169
- Feynman R. P., Hibbs A. R., 1965, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, New York
- Gaisser T. K., 1990, *Cosmic rays and particle physics*, Cambridge University Press, Cambridge
- Gieseler U. D. J., Duffy P., Kirk J. G., Gallant Y. A., 1997, *Proc. 25th. Int. Cosmic Ray Conf., Durban*, **4**, 437
- Gieseler U. D. J., Kirk J. G., 1997a, *J. Math. Phys.* **38**, 2751
- Gieseler U. D. J., Kirk J. G., 1997b, *A&A* **323**, 259
- Gieseler U. D. J., Kirk J. G., 1997c, *Proc. 25th. Int. Cosmic Ray Conf., Durban*, **3**, 13
- Gleeson L. J., Axford W. I., 1967, *ApJ* **149**, L115
- Goldstein H., 1989, *Klassische Mechanik*, AULA-Verlag, Wiesbaden
- Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M., 1994, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, London
- Haardt F., 1993, *ApJ* **413**, 680
- Haardt F., Maraschi L., 1993, *ApJ* **413**, 507
- Haardt F., Maraschi L., Ghisellini G., 1994, *ApJ* **432**, L95

- Hasselmann K., Wibberentz G., 1970, ApJ **162**, 1049
- de Hoffmann F., Teller E., 1950, Phys. Rev. **80**, 692
- Hua X.-M., Titarchuk L. G., 1995, ApJ **449**, 188
- Isichenko M. B., 1991, Plasma Physics and Controlled Fusion **33**, 795
- Jackson J. D., 1983, *Klassische Elektrodynamik*, Walter de Gruyter, New York
- Jokipii J. R., 1971, Review of Geophysics and Space Physics **9**, 27
- Jokipii J. R., 1987, ApJ **313**, 842
- Jokipii J. R., Parker E. N., 1969a, ApJ **155**, 777
- Jokipii J. R., Parker E. N., 1969b, ApJ **155**, 799
- Jones F. C., Ellison D. C., 1991, Space Sc. Rev. **58**, 259
- Kadomtsev B. B., Pogutse O. P., 1979, in *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion*, Proc. 7th. Int. Conf., Wien, **1**, 649
- van Kampen, N. G., 1997, Physikalische Blätter **53**, 1012
- Katz J. I., 1976, ApJ **206**, 910
- Kirk J. G., Duffy P., Gallant Y. A., 1996, A&A **314**, 1010
- Kirk J. G., Duffy P., Gallant Y. A., 1997, Advances in Space Research **19**, 707
- Kirk J. G., Heavens A. F., 1989, MNRAS **239**, 995
- Kirk J. G., Melrose D. B., Priest E. R., 1994, *Plasma Astrophysics*, Saas-Fee Advanced Course 24, Editors: A. O. Benz and T. J.-L. Courvoisier, Springer-Verlag, Berlin
- Kirk J. G., Schneider P., 1987, ApJ **322**, 256
- Kompaneets A. S., 1957, Sov. Phys. JETP **4**, 730
- Krymskii G. F., 1977, Sov. Phys. Dokl. **22**, 327
- Kuijpers J., 1996, *Plasma Astrophysics*, EADN Astrophysics School VII, Editors: C. Chiuderi and G. Einaudi, Springer-Verlag, Berlin
- Kučer I., McCormick N. J., 1991, Transport Theory and Statistical Physics **20**, 351
- Landau L. D., Lifschitz E. M., 1988, *Quantenmechanik*, Akademie-Verlag, Berlin

- Landau L. D., Lifschitz E. M., 1991, *Hydrodynamik*, Akademie-Verlag, Berlin
- Longair M. S., 1992, *High energy astrophysics*, Cambridge University Press, Cambridge
- Mahan G. D., 1995, J. Math. Phys. **36**, 6758
- McCormick N. J., Kušcer I., 1965, J. Math. Phys. **6**, 1939
- McCormick N. J., Kušcer I., 1966, J. Math. Phys. **7**, 2036
- McCormick N. J., Mendelson M. R., 1964, Nucl. Sci. Eng. **20**, 462
- Montroll E. W., Weiss G. H., 1965, J. Math. Phys. **6**, 167
- Naito T., Takahara F., 1995, MNRAS **275**, 1077
- Ostrowski M., 1991, MNRAS **249**, 551
- Ostrowski M., 1993, MNRAS **264**, 248
- Parker E. N., 1965, Planet. Space Sci. **13**, 9
- Pomraning G. C., 1973, *Radiation Hydrodynamics*, Pergamon Press, Oxford
- Poutanen J., Svensson R., 1996, ApJ **470**, 249
- Pozdnyakov L. A., Sobol I. M., Sunyaev R.A., 1983, Ap. Space Phys. Rev. **2**, 189
- Prasad M. K., Shestakov A. I., Kershaw D. S., Zimmerman G. B., 1988, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer **40**, 29
- Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P., 1992, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, Cambridge
- Ragot B. R., Kirk J. G., 1997, A&A **327**, 432
- Rax J. M., White R. B., 1992, Phys. Rev. Letts. **68**, 1523
- Rechester A. B., Rosenbluth M. N., 1978, Phys. Rev. Letts. **40**, 38
- Rybicki G. B., Lightman A. P., 1979, *Radiative Processes in Astrophysics*, John Wiley & Sons, New York
- Schatzman E., 1963, Annales d'Astrophys. **26**, 234
- Shapiro S. L., Lightman A. P., Eardley D. M., 1976, ApJ **204**, 187
- Skilling J., 1975, MNRAS **172**, 557

- Sobolev V. V., 1975, *Light scattering in planetary atmospheres*, Pergamon Press, Oxford
- Stern B. E., Begelman M. C., Sikora M., Svensson R., 1995a, MNRAS **272**, 291
- Stern B. E., Poutanen J., Svensson R., Sikora M., Begelman M. C., 1995b, ApJ **449**, L13
- Stix T. H., 1973, Phys. Rev. Lett. **30**, 833
- Sunyaev R. A., Titarchuk L. G., 1980, A&A **86**, 121
- Sunyaev R. A., Titarchuk L. G., 1985, A&A **143**, 374
- Sunyaev R. A., Trümper J., 1979, Nature **279**, 506
- Terasawa T., 1979, Planet Space Sci. **27**, 193
- Titarchuk L. G., 1994, ApJ **434**, 570
- Titarchuk L. G., Lyubarskij Y., 1995, ApJ **450**, 876
- Titarchuk L. G., Mastichiadis A., 1994, ApJ **433**, L33
- Wang H.-D., Vlad M., Vanden Eijnden E., Spineanu F., Misguich J. H., Balescu R., 1995, Phys. Rev. E **51**, 4844
- Webb G. M., Axford W. I., Terasawa T., 1983, ApJ **270**, 537
- Wolfram S., 1991, *Mathematica*, Addison–Wesley, New York
- Zdziarski A. A., 1986, ApJ **303**, 94
- Zdziarski A. A., Johnson W. N., Done C., Smith D., McNaron–Brown K., 1995, ApJ **438**, L63

Danksagung

Ich möchte mich sehr herzlich bei Herrn Priv.-Doz. Dr. John Kirk für die intensive Betreuung bedanken. In jeder unserer zahlreichen Diskussionen konnte ich entscheidende Fortschritte zur Lösung meiner physikalischen Probleme machen und gleichzeitig sehr gewinnbringende Einblicke in seine Art physikalisch zu denken erhalten. Dies hat nicht nur maßgeblich zur Bearbeitung des Themas beigetragen, sondern mich darüber hinaus nachhaltig motiviert.

Dem Direktorium des Max-Planck-Institutes für Kernphysik, Heidelberg, insbesondere Herrn Prof. Dr. Heinz Völk danke ich für die Unterstützung durch Bedingungen, die mir alle Möglichkeiten des wissenschaftlichen Arbeitens eröffnet haben. Ebenso hilfreich war mir eine angenehme und diskussionsfreudige Arbeitsatmosphäre, wofür ich mich bei allen Mitarbeitern der Astrophysik-Abteilung bedanke.

Für einen Gastaufenthalt am Sterrenkundig-Instituut der Universität Utrecht und für die dort erhaltenen Anregungen zu meiner Arbeit danke ich den Herren Prof. Dr. Abraham Achterberg und Dr. Yves Gallant. Allen Mitarbeitern dieses Institutes, insbesondere Herrn Gé Geijtenbeek, danke ich für ihre freundliche Unterstützung.

Ein Teil dieser Arbeit wurde vom Sonderforschungsbereich 328 unterstützt. Stellvertretend für alle Verantwortlichen danke ich dem Sprecher des SFB, Herrn Prof. Dr. Werner Tscharnuter, dem ich auch für die Übernahme des Korreferates danke.

Herrn Prof. Dr. Lev Titarchuk danke ich für das Interesse an meiner Arbeit und für zahlreiche Anregungen.

Für die Hilfe beim Umgang mit Rechnern und eine ständige Diskussionsbereitschaft bedanke ich mich bei den Herren Dr. Peter Duffy und Dipl.-Phys. Marc Hemberger.

Bei Herrn Dipl.-Phys. Jörg Fischera bedanke ich mich für das Korrekturlesen des Manuskriptes.

Mein besonderer Dank gilt meiner Frau und meinem Vater. Ihr Verständnis und ihre Unterstützung während meines gesamten Studiums haben sehr zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Lebenslauf

Udo Dieter Jürgen Gieseler

- 20.03.1967 geboren in Hagen
- 09/73 – 07/77 Besuch der Grundschule in Hagen
- 08/77 – 05/87 Besuch des Ricarda–Huch–Gymnasiums in Hagen
- 25.05.1987 Schulabschluß: Abitur
- 07/87 – 08/88 Grundwehrdienst bei der Luftwaffe in Weert/NL und Burbach
- 10/88 – 10/90 Studium der Physik an der Ruhr–Universität Bochum.
Abschluß: Vordiplom
- 10/90 – 05/95 Fortsetzung des Physikstudiums an der RWTH Aachen. Thema der von Prof. Dr. Lalit Sehgal betreuten Diplomarbeit: *Verteilung und Korrelation von Leptonen aus Zerfällen schwerer Higgs–Bosonen*
- 12.05.1995 Studienabschluß als Diplom–Physiker an der RWTH Aachen
- 06/95 – 02/98 Doktorand am Max–Planck–Institut für Kernphysik in Heidelberg. Thema der von Priv.–Doz. Dr. John Kirk betreuten Doktorarbeit: *Transport und Beschleunigung von Teilchen in astrophysikalischen Plasmen*
- 11.02.1998 Promotion in Physik an der Ruprecht–Karls–Universität Heidelberg
- seit 02/98 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Max–Planck–Institut für Kernphysik in Heidelberg. Seit September 1997 gefördert durch den Sonderforschungsbereich 328